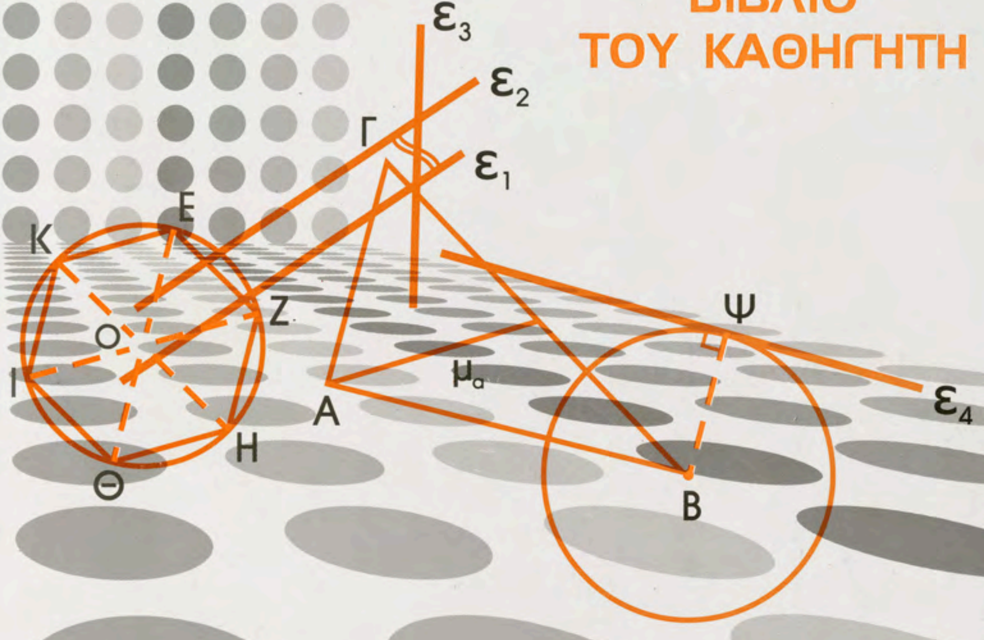
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΗ



Α΄ και Β΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΝΕΜΕΤΑΙ ΔΩΡΕΑΝ

4

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου

ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΗ

ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΕΡΓΟΥ
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΟΜΑΔΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

Αργυρόπουλος Ηλίας
Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ.Πολυτεχνείου
Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Βλάμος Παναγιώτης
Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Κατσούλης Γεώργιος
Μαθηματικός

Μαρκάτης Στυλιανός
Επίκουρος Καθηγητής Τομέα Μαθηματικών Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Σίδερης Πολυχρόνης
Μαθηματικός, τ. Σχολικός Σύμβουλος

Ιστορικά Σημειώματα: *Βανδουλάκης Ιωάννης*
Διδάκτωρ Πανεπιστημίου Μ. Lomonosov Μόσχας
Ιόνιο Πανεπιστήμιο

Φιλολογική Επιμέλεια: *Δημητρίου Ελένη*

Επιλογή εικόνων: *Παπαδοπούλου Μπία*

Εικονογράφηση - Σελιδοποίηση: *Αλεξοπούλου Καίτη*

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αγαπητοί Συνάδελφοι,

Το παρόν τεύχος αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος αναφέρεται στο περιεχόμενο, στη δομή της Γεωμετρίας, στην ιστορική εξέλιξη και στους στόχους της.
Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζουμε διδακτικές προτάσεις για την καλύτερη διεξαγωγή του μαθήματος της Γεωμετρίας. Είναι ευνόητο ότι ο διδάσκων έχει την ευχέρεια να τροποποιήσει και φυσικά να βελτιώσει τις προτάσεις αυτές κατά την κρίση του, ανάλογα με τις ώρες διδασκαλίας που έχει στη διάθεσή του, την καθορισμένη διδαχθείσα ύλη και το επίπεδο της τάξης του.

Με βασικό στόχο την υποστήριξη του έργου του εκπαιδευτικού παρέχεται μία πρώτη οργάνωση των διδακτικών ωρών που απαιτούνται ανά παράγραφο, υπογραμμίζονται οι βασικές έννοιες και σημειώνονται διδακτικοί στόχοι και οδηγίες διδασκαλίας.

Σημαντική είναι και η προσπάθεια εισαγωγής συγκεκριμένων μεθοδολογιών αξιολόγησης του μαθητή και της μαθησιακής διαδικασίας, σε μεγάλη συχνότητα και με συγκροτημένη μορφή.

Πρέπει να τονισθεί ότι σε καμία περίπτωση δε ζητείται η τήρηση κατά γράμμα των οδηγιών αυτών, που μόνο στόχο έχουν τη διευκόλυνση του διδάσκοντος και τον προβληματισμό του σε συγκεκριμένες διδακτικές προτάσεις. Αντίθετα, θα πρέπει να ενθαρρύνεται η πρωτοβουλία και αυτενέργεια του διδάσκοντος μέσα στην τάξη, παρέχοντάς του τη δυνατότητα να αντλήσει πλούσιο υλικό από το σχολικό βιβλίο και τις διδακτικές οδηγίες.

Οι συγγραφείς

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Μέρος 1

Η Διδασκαλια της Γεωμετριας

1. Γενικοί στόχοι των Μαθηματικών

Ο γενικός σκοπός της εκπαίδευσης είναι η δημιουργία ενός ολοκληρωμένου ανθρώπου, σε σχέση με τον εαυτό του, την κοινωνία και τη γνώση.

Ο κάπως αόριστος αυτός σκοπός υλοποιείται και με τα Μαθηματικά αφού συμβάλλουν:

1. στην ορθολογική σκέψη, ανάλυση, αφαίρεση, γενίκευση και αποδεικτική διαδικασία,

2. στη σύλληψη εννοιών, σχέσεων και ιδιοτήτων που βοηθούν στην κατανόηση του κόσμου,

3. στη χρήση της μαθηματικής γλώσσας - που χαρακτηρίζεται από τάξη, σαφήνεια, ακρίβεια και λιτότητα - στη ζωή.

2. Το μάθημα της Γεωμετρίας και οι στόχοι του

Η θεωρητική Γεωμετρία ως μέρος της μαθηματικής γνώσης έχει στόχο να βάλει τάξη στο πλήθος των μορφών που μας περιβάλλουν. Ήταν το πρώτο σύστημα γνώσεων που έκανε το άλμα από την εμπειρική συλλογή δεδομένων και μεθόδων στο στάδιο της επιστημονικής θεωρίας (και επί αιώνες το μοναδικό) και στηρίχθηκε στη διαμορφωμένη αίσθηση του χώρου που έχει ο άνθρωπος, οργανώνοντάς την σε θεωρητικό σύστημα με πρακτικές εφαρμογές. Βασικό εργαλείο της η αφαιρετική-συνθετική σκέψη, τόσο με τον ακριβή προσδιορισμό των εννοιών, όσο και με τη χρήση της λογικής στην αποδεικτική διαδικασία.

Το αντίστοιχο μάθημα στο Λύκειο οφείλει να διατηρεί αυτά τα χαρακτηριστικά: οφείλει να οδηγήσει τους μαθητές στον επιστημονικό τρόπο σκέψης, τον *ορθό λόγο*, εφαρμοσμένο σε ένα προνομιακό αντικείμενο, κοινό σε όλους, την αίσθηση και οργάνωση του χώρου. Οι μαθητές έχουν ήδη διαμορφωμένη αίσθηση του χώρου, είτε από σχολικά είτε από εξωσχολικά ερεθίσματα. Το μάθημα δεν μπορεί να αγνοήσει αυτό το υπόβαθρο ούτε βέβαια να το καταπολεμήσει. Σκοπός του είναι να το φωτίσει με νέο φως, διεξοδικά, συστηματικά, ξεκαθαρίζοντας ενδεχομένως λαθεμένες ή συγκεχυμένες αντιλήψεις που προϋπάρχουν. Οι μαθητές πρέπει από την αρχή να καταλάβουν τους κανόνες του παιχνιδιού με το *γνωστό-άγνωστο*: ο κύκλος ή η ορθή γωνία, για παράδειγμα, είναι έννοιες γνωστές σε όλους, αλλά η Γεωμετρία δεν ασχολείται με αυτές πριν δοθεί ο αντίστοιχος ορισμός τους και δε θεωρεί γνωστές τις ιδιότητές τους πριν να αποδειχθούν.

Αυτή η γραμμή πλεύσης ακολουθήθηκε και για το διδακτικό βιβλίο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Χωρίς θυσία της επιστημονικής αρτιότητας, το μάθημα οφείλει να είναι όσο το δυνατόν πιο προσιτό, πιο εύληπτο. Διευκολύνουμε όσο μπορούμε, αλλά βασιλική οδός για τη Γεωμετρία εξακολουθεί να μην υπάρχει.

Εδώ χρειάζεται μια διευκρίνιση. Η επιστημονική αρτιότητα σημαίνει νοηματική σαφήνεια και όχι αναγκαστικά λεκτική τυποποίηση. Αντίθετα, η συστηματική επαναδιατύπωση των προτάσεων (θεωρημάτων, αξιωμάτων, κτλ.) με άλλα λόγια, βοηθάει στην κατανόηση. Λέμε "Η ευθεία ε περνάει από το σημείο Α" ή "διέρχεται", ή "το Α ανήκει στην ε" ή "βρίσκεται", ή "κείται": νοηματική διαφορά, σε ένα πρώτο επίπεδο, δεν υπάρχει. Η διάκριση των δύο από το δάσκαλο είναι απαραίτητη, γιατί πολλές φορές η συνήθεια παράγει κανόνες κρυφούς που οδηγούν στο λάθος: Αν το Πυθαγόρειο θεώρημα αποστηθιστεί άκριτα ως "$α^2=β^2+γ^2$", επειδή την υποτείνουσα τη συμβολίζουμε συνήθως με "α", είναι πιθανότατο να γραφεί λάθος τύπος, αν σε κάποιο σχήμα παρουσιαστεί ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα "γ".

Ας δούμε κάπως αναλυτικότερα τις βασικές επιλογές του βιβλίου.

- Τα περισσότερα αξιώματα εκφράζονται ρητά, ωστόσο ορισμένα αξιώματα λείπουν τελείως, όπως το αξίωμα της ύπαρξης τριών μη συνευθειακών σημείων στο επίπεδο. Το αξίωμα (ή τα αξιώματα) της συνέχειας αντικαταστάθηκε με δύο τρόπους: οι γεωμετρικές συνέπειές του καλύπτονται από άλλα αξιώματα ύπαρξης σημείου τομής, ενώ το εννοιολογικό του περιεχόμενο καλύπτεται από τις έννοιες του κινητού σημείου που παράγει γραμμή, καθώς και της απόστασης. Δεδομένου ότι τα συνεχή μεγέθη (μήκος, χρόνος, βάρος) προϋπάρχουν εμπειρικά από τη μέτρησή τους και η μαθηματικοποιημένη έννοια της συνέχειας παρουσιάζει προβλήματα αφομοίωσης, είναι σκόπιμο η γεωμετρική μελέτη των συνεπειών της (τομή γραμμών, οριακές θέσεις κ.ά.) να προηγηθεί από (και να υποβοηθήσει) την εισαγωγή της στην ανάλυση: το ποιοτικό προηγείται του ποσοτικού.

- Τα αξιώματα δεν παρατίθενται στην αρχή, αλλά εκεί που το απαιτεί η αποδεικτική πορεία. Το ίδιο ισχύει και για τα θεωρήματα και τους ορισμούς: κάθε νέα έννοια ανοίγει νέους ορίζοντες, καλό είναι να τους εκμεταλλευθούμε αμέσως, αντί να παραθέτουμε πρώτα μια λίστα ορισμών και μετά μια λίστα θεωρημάτων. Η αποδεικτική διαδικασία αρχίζει το νωρίτερο δυνατόν.
- Εφόσον η εφαρμογή των σχημάτων είναι αυτό που πιστοποιεί την ισότητά τους, η σύγχρονη μαθηματική σκέψη (τουλάχιστον μετά τον Klein) απαιτεί τη χρήση μετασχηματισμών. Έτσι εισάγουμε τις μετακινήσεις, που δρουν ως μετασχηματισμοί και στέλνουν ένα σχήμα σε ίσο σχήμα, δηλαδή διατηρούν τις αποστάσεις. Στην ουσία μια μετακίνηση είναι το αποτέλεσμα μιας κίνησης (αρχική θέση - τελική θέση) και είναι άμεσα συνδεδεμένη με τις γεωμετρικές κατασκευές (ο διαβήτης διατηρεί τα μήκη). Μια μετακίνηση υλοποιείται ως διαδικασία - και μάλιστα κατασκευαστική - και δεν αποτελεί ένα αφηρημένο μαθηματικό αντικείμενο προς μελέτη (μετέπειτα, οι μετακινήσεις αποτελούν το κατεξοχήν παράδειγμα για τη θεωρία ομάδων - σε αυτή τη φάση το θέμα δεν τίθεται).
- Η διατήρηση των αποστάσεων οδηγεί στη γρήγορη εισαγωγή και πρώτη μελέτη του κύκλου, από το δεύτερο κιόλας κεφάλαιο, πριν τα τρίγωνα. Το μάθημα εμπλουτίζεται αμέσως και αυτό είναι πλεονέκτημα, γιατί ο κύκλος είναι από τα απλούστερα γεωμετρικά σχήματα. Είναι να απορεί κανείς γιατί εισάγεται συνήθως αργά: αυτό ίσως οφείλεται στο ότι η εξίσωσή του είναι δευτέρου βαθμού, πράγμα που έχει νόημα στην προβολική Γεωμετρία, σίγουρα όμως δεν έχει νόημα όταν ασχολείται κανείς με αποστάσεις και μάλιστα ευκλείδειες.

Ένα άλλο σημείο που πρέπει να τονιστεί είναι η σχέση της Γεωμετρίας με άλλα μαθήματα καθώς και με τη γενικότερη παιδεία του μαθητή. Ας μην επιμείνουμε στη σημασία της αφαιρετικής σκέψης, που είναι κοινός τόπος (ή τουλάχιστον θα όφειλε, δύο χιλιάδες χρόνια μετά τον Αριστοτέλη). Μέσα στο πλαίσιο των Μαθηματικών, η Γεωμετρία κατέχει ιδιαίτερη θέση: το αντικείμενό της (τα σχήματα) είναι άμεσα δοσμένο από την εμπειρία και, σε αντίθεση με τους αριθμούς (φυσικούς ή πραγματικούς), δεν είναι διατεταγμένο σύνολο. Η Γεωμετρία δεν μπορεί να αναχθεί στην αριθμητική ούτε καν στην “αριθμητική του συνεχούς”, παρά μόνο σε πολύ υστερότερα στάδια αφαίρεσης και γενίκευσης. Είναι επομένως μεθοδολογικό σφάλμα η Γεωμετρία να ανάγεται στη μέτρηση: ένα μέγεθος δεν ταυτίζεται με το μέτρο του, η μέτρηση προϋποθέτει επιλογή της μονάδας και σύγκριση με αυτήν, όπως εξηγείται και στο κείμενο του βιβλίου. Επιχειρήματα του τύπου “παίρνουμε το μήκος ενός τμήματος και διαιρούμε διά δύο για να βρούμε το μέσο του” είναι πρωθύστερα, παρ’ότι ανάγονται στην καθημερινή πρακτική, γιατί σκοπός της Γεωμετρίας είναι να αναλύσει και να θεμελιώσει αυτή την πρακτική. Για να γίνει η μέτρηση κατανοητή, δε πρέπει να θεωρηθεί δεδομένη. Αυτό είναι απαραίτητο στη Φυσική, τη Χημεία και γενικότερα παντού, όπου μετρούνται μεγέθη, και πολλές φορές πιο αφηρημένα από το μήκος. Ας αρχίσει λοιπόν η διάκριση μεγέθους και μέτρου του.

Ένα άλλο βασικό θέμα όπου η γεωμετρική γνώση είναι πολύτιμη για τα υπόλοιπα Μαθηματικά και τη Φυσική (τουλάχιστον) είναι οι έννοιες της συνέχειας και του ορίου. Κλασικό παράδειγμα η εφαπτομένη ως οριακή θέση της τέμνουσας κύκλου, η οποία εύκολα γενικεύεται για οποιαδήποτε ομαλή καμπύλη, οδηγώντας στην παράγωγο της αντίστοιχης συνάρτησης ή στην ταχύτητα, οριακή τιμή της μέσης ταχύτητας προκειμένου για τη Φυσική. Η γεωμετρική παιδεία, αν υπάρχει, βοηθάει το μαθητή να κατανοήσει τι σημαίνουν αυτά τα περίεργα ε και δ ή Δx και Δy, που ξεφυτρώνουν απο το πουθενά στον ορισμό της συνέχειας ή της παραγώγου που θα γνωρίσει ο μαθητής στην τελευταία τάξη του Λυκείου. Γι’ αυτό εξάλλου και είναι σκόπιμο μια εφαπτομένη κύκλου να σχεδιάζεται με τυχαία κλίση και όχι συστηματικά οριζόντια ή κάθετη.

Ας αναφερθούμε επίσης στον ουσιαστικό ρόλο των ασκήσεων, που επιτρέπουν στο μαθητή να παράγει ο ίδιος τη μαθηματική γνώση στο επίπεδό του, και αυτό αποτελεί την καλύτερη μέθοδο εκμάθησης. Αυτά βέβαια είναι γνωστά στον κάθε δάσκαλο, γι’ αυτό και δε θα επεκταθούμε. Ιδιαίτερη φροντίδα έχει δοθεί για τη διαβάθμιση των ασκήσεων σε σχέση με το ρόλο που επιτελούν. Ο χαρακτηρισμός τους είναι ενδεικτικός της μαθησιακής διαδικασίας: ερωτήσεις κατανόησης, ασκήσεις εμπέδωσης, αποδεικτικές ασκήσεις, σύνθετα θέματα και γενικές ασκήσεις. Τέλος, το βιβλίο έχει εμπλουτισθεί με δραστηριότητες που προτείνονται να γίνουν μέσα στην τάξη από ομάδες μαθητών και εργασίες για προσωπική μελέτη των μαθητών.

Επίσης σημαντικό ρόλο, άλλης φύσης όμως, έχουν και τα ιστορικά σημειώματα, στα οποία αναφερόμαστε παρακάτω (§5).

3. Πρωταρχικοί όροι και Αξιώματα

Στο πρώτο κεφάλαιο που αναφέρεται στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας που είναι ο χώρος και τα σχήματα γίνεται αντιληπτό ότι για τη μελέτη του χώρου χρειάζεται η ανασύνθεσή του. Αυτή η ανασύνθεση ξεκινά από κάποια απλά και αυθύπαρκτα στοιχεία, που είναι οι **πρωταρχικοί όροι** και τα **αξιώματα**.

☛ *Πρωταρχικοί όροι που αφορούν γεωμετρικά αντικείμενα:*

Σημεία, ευθείες, επίπεδα.

☛ *Πρωταρχικοί όροι που αφορούν ιδιότητες:*

Θέση, μεταξύ, εκατέρωθεν (ορίζεται έμμεσα σε αντιπαράθεση με το μεταξύ).

Όσον αφορά τα αξιώματα, χρησιμοποιούνται ως ακρογωνιαίοι λίθοι για να αναπτυχθεί με αυστηρότητα και συνέπεια το οικοδόμημα της Γεωμετρίας.

Ο τίτλος του βιβλίου που κρατάτε «Ευκλείδεια Γεωμετρία» οφείλεται στον τρόπο συγκρότησης των εννοιών και ανάπτυξης αυτών.

Είναι η μέθοδος που θεμελιώνει λογικά κάθε επιστήμη. Κάτω από το κείμενο κρύβεται η αξιωματική μέθοδος παραγωγής, όπου με αφετηρία κάποιες βασικές αρχές και αποδεικτικές μεθόδους γίνεται η ανάπτυξη.

Όμως αξιώματα προφανή, όπως της συνέχειας και της διάταξης αποφεύγεται να αναφερθούν ως αξιώματα. Ο τρόπος παρουσίασης οφείλει να έχει την απαραίτητη μαθηματική συνέπεια, αυστηρότητα και ακρίβεια και συγχρόνως διδακτική απλότητα και φυσικότητα.

Τα αξιώματα όμως αυτά δεν τονίζονται ιδιαίτερα και, μάλιστα, όλα όσα χρησιμοποιούνται. Τούτο γίνεται για παιδαγωγικούς, διδακτικούς λόγους και ιδιαίτερα για να μην προβάλλεται και υπερτονίζεται κάτι που είναι πασιφανές.

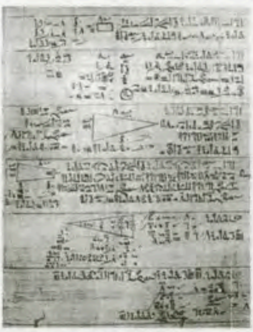
Ο διδάσκων βέβαια πρέπει να είναι γνώστης των αξιωμάτων που υπάρχουν ή υποκρύπτονται σε κάθε κεφάλαιο και μπορεί να τα αναφέρει ιδιαίτερα αν το κρίνει σκόπιμο ή αν προκύψει η ανάγκη αναφοράς αυτών.

4. Σύντομη επισκόπηση της εξέλιξης της Γεωμετρίας

Αν κάποιος θέλει να προοδεύσει στα Μαθηματικά πρέπει να μελετήσει τους μεγάλους δασκάλους των Μαθηματικών κι όχι τους μαθητές.

Ν.Χ. Άμπελ

Τα πρώτα γεωμετρικά σχήματα εμφανίζονται πριν από 15.000 χρόνια περίπου σε αντικείμενα που υπηρετούσαν πρακτικές και διακοσμητικές ανάγκες, στις ζωγραφικές εικόνες των σπηλαίων, τα διακοσμητικά σχέδια των αγγείων και των υφασμάτων κ.α. Ο όρος «Γεωμετρία» προέρχεται από τις λέξεις «Γη» και «μέτρηση». Στο πλαίσιο αυτό ο πρώτος ιστορικός της Γεωμετρίας, ο Εύδημος ο Ρόδιος (περ. 335 π.Χ.), συνέδεσε τη γένεση της Γεωμετρίας με την ανάγκη της μέτρησης της γης στην Αίγυπτο για την αποκατάσταση των ορίων των χωραφιών που εξαλείφονταν από τις ετήσιες πλημμύρες του Νείλου.

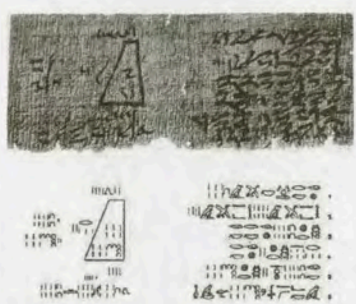


Ο πάπυρος του Ριντ (1650 π.Χ.). Βρετανικό Μουσείο. Λονδίνο.

1. Η Γεωμετρία στην Αρχαία Αίγυπτο και Μεσοποταμία

Οι αρχαιότερες γραπτές μαρτυρίες γεωμετρικών γνώσεων που είναι σήμερα γνωστές ανάγονται στις αρχές της δεύτερης χιλιετίας π.Χ. περίπου και προέρχονται από δύο μεγάλους πολιτισμούς της αρχαίας Ανατολής, της Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας. Στην Αίγυπτο οι μαρτυρίες αυτές έχουν διασωθεί κυρίως σε παπύρους, ενώ στη Μεσοποταμία σε 150 περίπου κείμενα μαθηματικού περιεχομένου, γραμμένα σε σφηνοειδή γραφή πάνω σε πήλινα πινακίδια.

Η Γεωμετρία στην αρχαία Αίγυπτο. Οι κύριες πηγές για τη Γεωμετρία στην Αίγυπτο είναι ο *πάπυρος του Ριντ (Rhind)* που περιέχει 87 μαθηματικά προβλή-



Τμήμα του παπύρου της Μόσχας (1850 π.Χ.) που απεικονίζει το πρόβλημα της εύρεσης του όγκου τετραγωνικής πυραμίδας. Το επάνω μέρος είναι στην ιερατική και το κάτω είναι μετάφραση στην ιερογλυφική γραφή. Μουσείο Α.Σ. Πούσκιν Μόσχα.

ματα, ο παλαιότερος ίσως κατά δύο αιώνες *πάπυρος της Μόσχας* που περιέχει 25 προβλήματα, και ο *πάπυρος του Καχούν (Kahun)*. Οι γεωμετρικές γνώσεις των Αιγυπτίων περιλαμβάνουν τη μέτρηση επιφανειών και όγκων που γίνεται με τη βοήθεια κατάλληλων αριθμητικών πράξεων. Κατά τα φαινόμενα, γνώριζαν να υπολογίζουν την επιφάνεια ορθογωνίου, τριγώνου και τραπεζίου με ακριβείς κανόνες, αλλά του τετραπλεύρου το υπολόγιζαν με προσεγγιστικό κανόνα ως γινόμενο των ημιαθροισμάτων των αντίθετων πλευρών. Το κατά πόσο γνώριζαν οι Αιγύπτιοι ότι ο κανόνας αυτός είναι προσεγγιστικός δεν μπορούμε σήμερα να απαντήσουμε. Από την άλλη, φαίνεται ότι διέθεταν μια αρκετά καλή προσέγγιση του αριθμού π, ως το τετράγωνο με πλευρά τα 8/9 της διαμέτρου (πάπυρος του *Ριντ*, πρόβλημα 51), η οποία δίνει σφάλμα μικρότερο του 1%. Ωστόσο η μέθοδος εύρεσης αυτού του αποτελέσματος δεν είναι γνωστή. Οι Αιγύπτιοι γνώριζαν επίσης κανόνες υπολογισμού των όγκων πολλών στερεών, όπως του κύβου, του παραλληλεπιπέδου, του πρίσματος και του κυλίνδρου, αλλά το πιο αξιοσημείωτο και αινιγματικό αποτέλεσμα της αιγυπτιακής Γεωμετρίας είναι ο υπολογισμός του όγκου κόλουρης πυραμίδας (πάπυρος της Μόσχας, πρόβλημα 14) που φαίνεται να ακολουθεί τον κανόνα $V=(υ/3)(α^2+αβ+β^2)$, όπου α και β οι πλευρές των τετραγώνων των δύο βάσεων και υ το ύψος (στον πάπυρο $α = 4$, $β = 2$, $υ = 6$).

Εν γένει η Γεωμετρία των Αιγυπτίων αφορά στη μέτρηση στοιχειωδών γεωμε-τρικών σχημάτων και *εμφανίζεται με τη μορφή κανόνων αριθμητικής επίλυσης στοιχειωδών γεωμετρικών προβλημάτων πρακτικής κατ' εξοχήν σημασίας*. Οι υπολογισμοί όγκων για παράδειγμα, εμφανίζονται σε προβλήματα προσδιορισμού του όγκου του σιταριού σε αποθήκη με δεδομένο σχήμα. Πολλές λύσεις γίνονταν με τη μέθοδο της δοκιμής και του λάθους και με άλλους εμπειρικούς κανόνες. Γι' αυτό πολλές φορές ήταν εξαιρετικά άκομψες.

Η Γεωμετρία της Μεσοποταμίας είναι δημιούργημα δύο κυρίως αρχαιότατων λαών της Ασίας, των Σουμερίων (3.000 π.Χ.) και των Βαβυλωνίων (2η-1η χιλιετία π.Χ.). Το πεδίο των γεωμετρικών αντικειμένων που εξετάζονται είναι ευρύτερο από αυτό που απαντάμε στην Αίγυπτο. Περιλαμβάνει επιπλέον ορισμένα κανονικά πολύγωνα, τον κυκλικό τομέα και τον κόλουρο κώνο. Όπως και οι Αιγύπτιοι, χρησιμοποιούν τόσο ακριβείς μεθόδους υπολογισμού, όσο και προσεγγιστικές, όπως π.χ. στην εύρεση της επιφάνειας τετραπλεύρου και του όγκου κόλουρης τετραγωνικής πυραμίδας και κόλουρου κώνου. Όμως ο υπολογισμός του αριθμού π ήταν πολύ χονδροειδής. Εκφραζόταν όχι ως συνάρτηση της διαμέτρου, αλλά ως το 1/12 του τετραγώνου της περιφέρειας του κύκλου και δίνει την τιμή 3[1]. Ο κανόνας αυτός για τον υπολογισμό του π απαντάται στην Κίνα και την Ινδία. Επίσης απαντώνται στοιχεία από την θεωρία των κανονικών πολυέδρων (βλ *Τα κανονικά πολύεδρα*).

Το περίφημο πινακίδιο Πλίμπτον 322 (1900-1600 π.Χ.). Συλλογή G.A. Plimpton, Τμήμα Σπανίων Βιβλίων και Χειρογράφων του Πανεπιστημίου Κολούμπια.

[1] Μια καλύτερη προσέγγιση χρησιμοποιείται σε ένα κείμενο από τα Σούσα και ισούται με 3,125=3×(1/8).

Η Γεωμετρία στη Μεσοποταμία έφτασε σε υψηλότερο επίπεδο απ' ότι στην Αίγυπτο. Η συμβολή των Βαβυλωνίων σε σχέση με τους Σουμέριους συνίσταται πιθανότατα στην εξέταση και προβλημάτων που δεν είχαν καθαρά πρακτική, οικονομική ή τεχνική προέλευση, αλλά λαμβάνονται, π.χ. ως αντίστροφα άλλων προβλημάτων. Όμως, παρά την πρόοδο που σημείωσε η Γεωμετρία στη Μεσοποταμία και το πλήθος των μεμονωμένων αποτελεσμάτων, *απουσιάζει το στοιχείο της εσωτερικής λογικής συνοχής ανάμεσα στους πολυάριθμους κανόνες και επομένως η έννοια του «συστήματος» γνώσης*. Πουθενά δεν απαντάται κάποια απόπειρα να δοθεί «λογική απόδειξη» ενός προβλήματος. Η προσέγγιση της Γεωμετρίας είναι κυρίως αριθμητική και η διαδικασία επίλυσης ανάγεται σε μία διαδοχή εντολών που εκτελούνται για συγκεκριμένες περιπτώσεις. Αυτός ο τρόπος μαθηματικής σκέψης, που είναι προσανατολισμένος στη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος, παρά στο πρόβλημα καθαυτό, χαρακτηρίζει όλες τις προ-Ελληνικές μαθηματικές παραδόσεις της Ανατολής και διατηρείται στη διάρκεια πολλών αιώνων.

2. Η Γεωμετρία της Κλασικής Ελληνικής Αρχαιότητας

Η γένεση της Γεωμετρίας ως αφηρημένης αποδεικτικής επιστήμης. Ποιοτικό άλμα πραγματοποιείται τον 5ο αι. π.Χ. στην αρχαία Ελλάδα, όπου η Γεωμετρία μετατρέπεται σε ανεξάρτητη αφηρημένη αποδεικτική επιστήμη και διαμορφώνονται καθαρά οι μαθηματικές έννοιες του σχήματος, της γεωμετρικής πρότασης και της απόδειξης. Η τελευταία, κατά τον Αριστοτέλη, λειτουργεί τόσο ως μέθοδος επιβεβαίωσης της αλήθειας μιας πρότασης, όσο και ως μέσο αποσαφήνισης της σχέσης μιας πρότασης με τις άλλες. Για πρώτη φορά εμφανίζεται η ιδέα ότι αν μια πρόταση αποδεικνύεται με βάση μια άλλη, και αυτή με τη σειρά της στηρίζεται σε μια τρίτη, κι αυτή σε μια τέταρτη κ.ο.κ., τότε πρέπει να σταματήσουμε κάπου αυτή την ακολουθία λογικών συμπερασμάτων και κάποια πρόταση να ληφθεί ως υπόθεση και να γίνει δεκτή χωρίς απόδειξη. Η ιδέα αυτή αποτελεί την πεμπτουσία της αξιωματικής προσέγγισης της Γεωμετρίας που αναπτύχθηκε για πρώτη φορά στην αρχαία Ελλάδα (βλ. *Η αξιωματική μέθοδος*).

Ένα άλλο ποιοτικά νέο χαρακτηριστικό που εμφανίζεται για πρώτη φορά στην αρχαία Ελλάδα είναι η γένεση σχολών φυσικής φιλοσοφίας στην αρχαία Ιωνία (7ος αι. π.Χ.), οι οποίες επιχείρησαν να ερμηνεύσουν ορθολογικά τον κόσμο με βάση μια πρώτη *αρχή*. Όμως οι πενιχρές ιστορικές μαρτυρίες ότι ο Θαλής ο Μιλήσιος (περ. 600 π.Χ.) απέδειξε πρώτος γεωμετρικά θεωρήματα με γενικό τρόπο και οι συναφείς ιστοριογραφικές αντιλήψεις για δήθεν άνθηση της Γεωμετρίας στις Ιώνιες πόλεις δεν είναι σήμερα αδιαμφισβήτητες[2]. Έμμεσες είναι και οι μαρτυρίες για τα γεωμετρικά επιτεύγματα της Πυθαγόρειας σχολής, η οποία ωστόσο είναι βάσιμο να πιστεύουμε ότι είχε κατεξοχήν αριθμητικό προσανατολισμό. Είναι μάλιστα πολύ γνωστό ότι ο Πυθαγόρας ο Σάμιος (περ. 540 π.Χ.) επιχείρησε να κατασκευάσει αριθμητικά μοντέλα του κόσμου και να ερμηνεύσει το σύμπαν με βάση τις

[2] Σύμφωνα με μαρτυρία του Ευδήμου, ο Θαλής μαθήτευσε στους Αιγυπτίους. Εν γένει, αρκετοί Έλληνες συγγραφείς (Ηρόδοτος, Πλάτωνας, Αριστοτέλης) θεωρούν ότι η «τέχνη» της Γεωμετρίας εισήχθη στην Ελλάδα από την Αίγυπτο ή τη Βαβυλώνα. Οι μαρτυρίες αυτές έχουν ιστορική βάση, αφού, ως γνωστόν, οι Έλληνες είχαν διαρκή εμπορική και στρατιωτική δραστηριότητα στην Αίγυπτο από τον 7ο αι. π.Χ. Όμως δεν είναι γνωστό πώς εξελίχθηκε ιστορικά η διαδικασία μετάδοσης της γνώσης. Παρ'όλα αυτά είναι αρκετά καθαρό ότι ο χαρακτήρας της Ελληνικής Γεωμετρίας διαφέρει ριζικά από αυτόν της Ανατολής.

κανονικότητες (*αρμονία*) των σχέσεων των φυσικών αριθμών. Η τάση αυτή εκφράζεται εναργέστατα με τη βασική θέση των Πυθαγορείων «τα πάντα είναι αριθμός». Από την άλλη, τα αποσπάσματα του Ιπποκράτη του Χίου για τους μηνίσκους μας επιτρέπουν να συμπεράνουμε ότι οι μετρικές ιδιότητες των επίπεδων ευθύγραμμων σχημάτων ήταν ήδη γνωστές από την εποχή του Ιπποκράτη.

Είναι μάλλον εύλογο να τοποθετήσουμε τη γένεση της αξιωματικής μεθόδου στη Γεωμετρία την περίοδο της άνθησης της Ακαδημίας του Πλάτωνα. Ιδιαίτερα σημαντική επίδραση στη διαδικασία αυτή φαίνεται να είχε η θεωρία των ιδεών του Πλάτωνα (περ. 400 π.Χ.), η πρώτη θεωρία αφηρημένων αντικειμένων στην ιστορία της ευρωπαϊκής σκέψης. Οι μαθηματικοί, ξεκινώντας από τον Ιπποκράτη το Χίο και το Λέοντα, έγραφαν «Στοιχεία», όπου προσέγγιζαν τη Γεωμετρία πιθανότατα με διαφορετικούς τρόπους και ξεκινώντας από διαφορετικές προτάσεις ως υποθέσεις.

Όμως το έργο που σφράγισε την εποχή αυτή, αλλά και τη μετέπειτα εξέλιξη της Γεωμετρίας για πολλούς αιώνες, διαμορφώνοντας το ιδεώδες της αξιωματικής αποδεικτικής επιστήμης ήταν *τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη* (περ. 3ος αι. π.Χ.). Τα «Στοιχεία» αποτελούν ταυτόχρονα και σύνοψη της μακραίωνης ελληνικής γεωμετρικής παράδοσης, αφού το μεγαλύτερο μέρος τους αντανακλά τη μαθηματική έρευνα από τον 4ο αι. π.Χ. και σε μερικές περιπτώσεις και προγενέστερα.

Τα «Στοιχεία» αποτελούνται από 13 Βιβλία, οκτώ από τα οποία (I-IV, VI, XI-XIII) είναι αφιερωμένα στη Γεωμετρία και τα υπόλοιπα στην Αριθμητική. Το Βιβλίο I περιγράφει τις βασικές ιδιότητες των τριγώνων, των παραλληλογράμμων και των τραπεζίων και καταλήγει με το θεώρημα του Πυθαγόρα. Στο Βιβλίο II αναπτύσσονται σε γεωμετρική γλώσσα μέθοδοι λύσης προβλημάτων που ερμηνεύονται ως δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Στο Βιβλίο III αποδεικνύονται ιδιότητες του κύκλου, των εφαπτομένων και των χορδών (τα προβλήματα αυτά είχαν αρχίσει να μελετώνται ήδη από την εποχή του Ιπποκράτη του Χίου). Στο Βιβλίο IV γίνεται η κατασκευή των κανονικών ν-γώνων (ν=3, 4, 5, 10, 15).

Το Βιβλίο V περιέχει τη *γενική θεωρία των αναλογιών* του Ευδόξου του Κνίδιου (4ος αι. π.Χ.), που είναι η βάση για τη θεωρία της ομοιότητας (Βιβλίο VI), και τη μεθοδο της εξάντλησης (Βιβλίο XII), η οποία ανάγεται επίσης στον Εύδοξο.

Τα Βιβλία VII-IX είναι αφιερωμένα στην Αριθμητική των φυσικών αριθμών και των λόγων τους και στηρίζονται στον αλγόριθμο της *ανθυφαίρεσης*, δηλαδή της εύρεσης του μέγιστου κοινού μέτρου δύο αριθμών. Με βάση τα Βιβλία αυτά κατασκευάζεται η ταξινόμηση των τετραγωνικών άρρητων μεγεθών στο Βιβλίο X, η οποία αποδίδεται στο Θεαίτητο (αρχές του 4ου αι. π.Χ.).

Στο Βιβλίο XI τίθενται οι αρχές της Στερεομετρίας, και στο Βιβλίο XII με τη βοήθεια της *μεθόδου της εξάντλησης* (βλ. *Μέτρηση*) γίνεται μέτρηση καμπύλων σχημάτων με βάση τη μέτρηση ευθύγραμμων σχημάτων. Με τη μέθοδο αυτή αποδεικνύεται ότι ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων ισούται με το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους, συγκρίνονται οι όγκοι κυλίνδρων και κώνων με τους όγκους των αντίστοιχων πρισμάτων και πυραμίδων και αποδεικνύεται ότι οι όγκοι δύο σφαιρών έχουν λόγο ίσο με το λόγο των κύβων των διαμέτρων τους.

Το οικοδόμημα των «Στοιχείων» επισφραγίζεται με την κατασκευή των πέντε κανονικών στερεών (Βιβλίο XIII), του τετραέδρου, του κύβου, του οκταέδρου, του δωδεκαέδρου και του εικοσαέδρου. Υπολογίζονται οι πλευρές τους σε συνάρτηση με την ακτίνα της περιγεγραμμένης σφαίρας με τη βοήθεια της θεωρίας των αρρήτων του Βιβλίου X και καταδυκνύεται ότι δεν υπάρχουν άλλα κανονικά στερεά.

Ο Ευκλείδης διαιρεί τις μαθηματικές προτάσεις σε δύο είδη: «θεωρήματα» και «προβλήματα». Στα θεωρήματα ζητείται να αποδειχθεί ότι ένα αντικείμενο έχει μια ορισμένη ιδιότητα, ενώ στα προβλήματα ζητείται να κατασκευασθεί κάποιο αντικείμενο που να έχει μια ορισμένη ιδιότητα. Στα «Στοιχεία» όλες αυτές οι κατασκευές στηρίζονται σε τρία αιτήματα: ότι από σημείο σε σημείο άγεται μία ευθεία, ότι μία πεπερασμένη ευθεία μπορεί να προεκτείνεται έπ' άπειρον, και ότι δεδομένου ενός σημείου ως κέντρου και ενός ευθύγραμμου τμήματος ως ακτίνας μπορεί να κατασκευαστεί κύκλος. Αυτά τα αιτήματα περιορίζουν τις κατασκευές στη χρήση του κανόνα και του διαβήτη (βλ. *Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της Αρχαιότητας*).

3. Η Γεωμετρία των Ελληνιστικών Χρόνων

Αρχιμήδης και Απολλώνιος. Τα «Στοιχεία» εγκαινιάζουν τη χρυσή εποχή της αρχαίας ελληνικής Γεωμετρίας (3ος αι. π.Χ.) όπου δεσπό-ζουσες φυσιογνωμίες αναδεικνύονται ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιος (περ. 287-212 π.Χ.) και ο Απολλώνιος ο Περγαίος (δεύτερο μισό του 3ου-αρχές του 2ου αι. π.Χ.). Ο Αρχιμήδης διευρύνει τη σφαίρα εφαρμογής της Ευδόξειας μεθόδου της εξάντλησης με τη μέτρηση καμπυλόγραμμων επιφανειών και όγκων νέων γεωμετρικών αντικειμένων (εμβαδόν δακτυλίου έλικας, εμβαδόν παραβολικού τομέα, εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας και όγκος σφαίρας, σφαιρικού και παραβολοειδούς τμήματος). Οι περισσότερες καινοτομίες στην κατεύθυνση αυτή βασίζονται στην εισαγωγή της έννοιας της κίνησης στη Γεωμετρία (στον κινηματικό ορισμό της έλικας και των σωμάτων εκ περιστροφής). Στον Αρχιμήδη ανήκει και η πρώτη μέθοδος για την προσέγγιση του αριθμού π (ο λόγος της περιφέρειας προς τη διάμετρο του κύκλου) μεταξύ των τιμών 310/70 και 310/71.


CONICORUM LIB. I.

Οι κωνικές τομές του Απολλωνίου, παραβολή (αριστερά), υπερβολή (μέσο), έλλειψη (δεξιά), από την έκδοση των «Κωνικών» του Έντμ. Χάλλεϋ, Οξφόρδη, 1710.

Ο Απολλώνιος είναι περισσότερο γνωστός από τη θεωρία των κωνικών τομών, των καμπυλών που λαμβάνονται από την τομή ενός επιπέδου με την επιφάνεια ενός (μονόχωνου ή δίχωνου) κώνου. Όταν το τέμνον επίπεδο είναι παράλληλο προς τη γενέτειρα του κώνου η λαμβανόμενη καμπύλη λέγεται παραβολή, αν τέμνει το ένα χωνί του κώνου παράγεται έλλειψη και αν τέμνει και τα δύο χωνιά παράγεται υπερβολή. Ο Απολλώνιος περιγράφει διεξοδικά τις ιδιότητες αυτών των καμπυλών στο έργο του «Κωνικά», που αποτελείται από οκτώ Βιβλία. Τα τέσσερα πρώτα διασώθηκαν στα Ελληνικά, τα επόμενα τρία σε αραβική μετάφραση του Άραβα μαθηματικού Θαμπίτ Ιμπν Κούρρα, ενώ το Βιβλίο VIII έχει χαθεί.

Ο Απολλώνιος εισάγει μια σημαντική καινοτομία στη μελέτη των κωνικών τομών. Πριν τον Απολλώνιο, ο Μέναιχμος, που είχε μελετήσει τις επίπεδες τομές ορθογώνιου, οξυγώνιου και αμβλυγώνιου κώνου εκ περιστροφής, σε σχέση με το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου (βλ. *Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας*), είχε αποδείξει τη βασική ιδιότητα των καμπυλών αυτών, που οι αρχαίοι ονόμαζαν *σύμπτωμα*, ως προς δύο άξονες «τεταγμένων», την κύρια διάμετρο και την κάθετο σε αυτήν που διέρχεται από την κορυφή της καμπύλης. Ο Απολλώνιος, από την άλλη, εξετάζει τις κωνικές τομές ως προς *οποιαδήποτε* διάμετρο και την εφαπτομένη στο ένα άκρο της. Κατόπιν ταξινομεί τις κωνικές ανάλογα με τη μορφή του *συμπτώματος*. Αυτή η ταξινόμηση είναι νόμιμη αφού η μορφή του συμπτώματος δεν αλλάζει, αν η καμπύλη θεωρηθεί ως προς μια άλλη διάμετρο και τις συζυγείς χορδές της.

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι άξονες των «τεταγμένων» στους αρχαίους γεωμέτρες είναι στενά συνδεδεμένοι με το σχήμα της κωνικής τομής, σε αντιδιαστολή με τη μέθοδο των συντεταγμένων στο έργο του Φερμά και του Ντεκάρτ, όπου οι άξονες λαμβάνονται αυθαίρετα και είναι ανεξάρτητοι από το εξεταζόμενο σχήμα. Επιπλέον, στη Γεωμετρία του Ντεκάρτ οποιαδήποτε καμπύλη μπορεί να μελετηθεί ως προς τους άξονες αυτούς.

Ο Απολλώνιος εξέτασε επίσης την έλικα που γράφεται σε επιφάνεια κυλίνδρου, ενώ στο έργο του «Περί επαφών», το οποίο δε διασώθηκε, κάνει τη γνωστή κατασκευή του κύκλου που εφάπτεται σε τρεις δεδομένους κύκλους ή σε οποιονδήποτε συνδυασμό τριών σημείων, ευθειών και κύκλων.

Το έργο του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη και του Απολλωνίου ήταν το αποκορύφωμα της αρχαίας αφηρημένης Γεωμετρίας. Η ιστορική περίοδος μετά το 2ο αι. π.Χ. χαρακτηρίζεται ως εποχή παρακμής των ελληνικών Μαθηματικών. Αξιοσημείωτο παραμένει το έργο του Πάππου (αρχές του 4ου αι. μ.Χ.), που επικεντρώνεται στη μελέτη καμπυλών σε «κρίκο» (torus) και άλλες επιφάνειες. Αργότερα ο Ευτόκιος (αρχές του 6ου αι.) και ο Σερήνος έγραψαν σχόλια στον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο από τα οποία μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες για έργα παλαιότερων μαθηματικών που δε διασώθηκαν. Οι μεμονωμένες όμως αυτές μελέτες δεν υπερέβησαν τον κύκλο προβλημάτων που χαράχτηκε από τους τρεις μεγάλους μαθηματικούς της αρχαιότητας. Δε βρίσκει κανείς ούτε νέες μεγαλοφυείς μαθηματικές ιδέες ούτε στίγματα νέων θεωριών. Βρίσκει όμως έναν επαναπροσανατολισμό των μαθηματικών ενδιαφερόντων προς νέες κατευθύνσεις εφαρμοσμένης Γεωμετρίας.

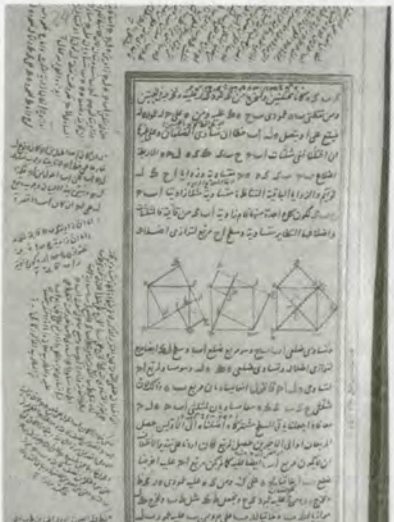
Οι εφαρμοσμένες γεωμετρικές προσεγγίσεις. Μία από τις κύριες ενασχολήσεις των γεωμετρών του 3ου αι. π.Χ. ήταν η ανάπτυξη γεωμετρικών προσεγγίσεων στη μελέτη των φυσικών επιστημών, ειδικότερα τη Μηχανική, την Οπτική και την Αστρονομία και η προσπάθεια να εκφράσουν τις βασικές έννοιες και αρχές τους ως συνάρτηση γεωμετρικών και αριθμητικών μεγεθών.

Στη Μηχανική συνεχίζεται η Περιπατητική τάση της μελέτης μηχανών με τα «Μηχανικά» του Ήρωνα (περ. 60 μ.Χ.). Όμως ποτέ την περίοδο αυτή οι μαθηματικές μέθοδοι στη Μηχανική δεν έφτασαν το επίπεδο της στατικής στα έργα του Αρχιμήδη «Επιπέδων Ισορροπιών» και «Οχουμένων».

Στην Οπτική η αρχή γίνεται και πάλι από τον Ευκλείδη που στα «Οπτικά» του διατυπώνει την υπόθεση ότι οι φωτεινές ακτίνες είναι ευθείες γραμμές. Μια πιο εμπειρική από τον Ευκλείδη προσέγγιση των οπτικών φαινομένων απαντάται στα «Οπτικά» του Πτολεμαίου (2ος αι. μ.Χ.) πάνω στη γεωμετρική οπτική και κατοπτρική. Ο Διοκλής (τέλος του 2ου αι. π.Χ.) αποδεικνύει ότι η επιφάνεια που αντανακλά τις ηλιακές ακτίνες και τις συγκεντρώνει σε ένα σημείο είναι παραβολοειδές εκ περιστροφής.

Το χειρόγραφο αυτό των «Οπτικών» του Ευκλείδη με τις καλαίσθητες μικρογραφίες με δρόμους πιθανολογείται ότι ανήκε στον Πιέρο ντελα Φραντσέσκα. Βιβλιοθήκη Ντιούκ του Ουρμπίνο (Urb. lat. 1329 φ. 1 recto).

Στο πεδίο της Αστρονομίας συνεχίζεται η παράδοση του Ευδόξου, που είχε κατασκευάσει ένα γεωκεντρικό μοντέλο κίνησης των πλανητών με βάση την αρχή του Πλάτωνα ότι μόνο συνδυασμοί ομοιόμορφων κυκλικών κινήσεων είναι επιτρεπτοί. Ο Αρίσταρχος ο Σάμιος (3ος αι. π.Χ.) προτείνει ένα μοντέλο κυκλικών τροχιών με κέντρο όμως τον Ήλιο, το οποίο δεν έγινε αποδεκτό στην εποχή του. Ένα εναλλακτικό μοντέλο προτάθηκε από τον Απολλώνιο, όπου οι πλανήτες περιστρέφονται γύρω από ένα σημείο, το οποίο ακολουθεί κυκλική τροχιά με κέντρο τη Γη ή κοντά στη Γη. Η Γεωμετρία της σφαίρας έγινε το αντικείμενο πραγματείας του Θεοδοσίου (3ος ή 2ος αι. π.Χ.), που συνεχίζει την παράδοση του Ευκλείδη, του Αυτολύκου (περ. 300 π.Χ.) στη σφαιρική αστρονομία, και των «Σφαιρικών» του Μενελάου (1ος αι. μ.Χ.).



Περσικό χειρόγραφο του 15ου αι. με σχόλια του Νασίρ αντ-Ντιν ατ Τουσί στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη.

Η σημαντικότερη όμως ανασυγκρότηση της ελληνικής Αστρονομίας σε θεωρητικό και πρακτικό επίπεδο έγινε από τον Ίππαρχο (2ος αι. π.Χ.), ο οποίος ήταν ίσως ο πρώτος που έκανε ποσοτικές μετρήσεις για τους κύκλους των υποθετικών αστρονομικών μοντέλων με βάση παρατηρησιακά δεδομένα. Δυστυχώς, τα πρωτότυπα έργα του Ιππάρχου δεν έχουν διασωθεί και κύρια πηγή για αυτό είναι η «Μαθηματική Σύνταξη (Αλμαγέστη)» του Πτολεμαίου, στο οποίο εκτίθεται η θεωρία των φαινομένων κινήσεων του Ήλιου, της Σελήνης και των πλανητών. Το έργο αυτό χαρακτηρίζεται από τη σύνθεση της ελληνικής επιστημονικής κληρονομιάς με τη βαβυλωνιακή αστρονομική παράδοση. Επίσης, αν και δεν υπήρχε στην αρχαιότητα συστηματική θεωρία για τα σφάλματα των παρατηρήσεων, ο Ίππαρχος και ο Πτολεμαίος προσπάθησαν να καθορίσουν τις συνθήκες που θα ελαχιστοποιούσαν τα σφάλματα στους υπολογισμούς τους.

4. Η Γεωμετρία των Μέσων Χρόνων και της Αναγέννησης

Η ελληνική γεωμετρική κληρονομιά του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη, του Απολλωνίου και του Μενελάου διατηρήθηκε και διαδόθηκε από τους Βυζαντινούς σε ορισμένα πνευματικά κέντρα του αραβικού κόσμου[3], όπως π.χ. ο «Οίκος της Σοφίας» στη Βαγδάτη. Πολλά επιστημονικά έργα μεταφράζονται στα Αραβικά εκείνη την εποχή, όπως ορισμένα έργα του Αρχιμήδη, τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη (τον 8ο-9ο αι.), τα «Κωνικά» του Απολλωνίου από τους αδελφούς Μπανού Μούσα (τον 9ο αι.). Έτσι διασώθηκαν και ορισμένα έργα σε Αραβική μετάφραση που απωλέσθησαν στα ελληνικά, όπως τα «Σφαιρικά» του Μενελάου, το «Περί διαιρέσεων» του Ευκλείδη, τα Βιβλία V-VII των «Κωνικών», και τα Βιβλία IV-VII των «Αριθμητικών» του Διοφάντου. Το 10ο αι. οι Άραβες γεωμέτρες χρησιμοποιούν τα «Κωνικά» του Απολλωνίου στη λύση προβλημάτων που δεν επιλύονται με κανόνα και διαβήτη (βλ. *Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της Αρχαιότητας*), στη μέτρηση επιφανειών και όγκων επίπεδων και στερεών σχημάτων που σχηματίζονται με τη βοήθεια κωνικών τομών καθώς και σε ορισμένα προβλήματα Οπτικής που αφορούν στις ιδιότητες κατόπτρων με σχήμα κωνική τομή. Πρωτότυπος είναι ο υπολογισμός του τμήματος παραβολής από τον Θαμπίτ Ιμπν Κούρρα (836-901), που υπολόγισε επίσης τον όγκο στερεού εκ περιστροφής της παραβολής περί τον άξονά της. Επίσης ο Ιμπν αλ Χαϊθάμ (περίπου 965-1039) προσδιόρισε τον όγκο στερεού εκ περιστροφής παραβολικού τμήματος περί την τεταγμένη. Η μέθοδος των αποδείξεων αυτών παραμένει Αρχιμήδεια.

Από τα θεωρητικά προβλήματα της Γεωμετρίας αξιοσημείωτες είναι οι αναζητήσεις των Αράβων μαθηματικών στη θεωρία των παραλλήλων κατά τη διάρκεια του 9ου-14ου αι. Πολλοί Άραβες μαθηματικοί θεωρούσαν ότι το 5ο αίτημα των «Στοιχείων» του Ευκλείδη είναι θεώρημα και προσπαθούσαν να το αποδείξουν με βάση τα υπόλοιπα αιτήματα και αξιώματα των «Στοιχείων». Στην Ευρώπη παρόμοιες προσπάθειες χρονολογούνται από το 13ο αι. (βλ. *Η θεωρία των παραλλήλων*).

Το 12ο-13ο αι. πολλά αραβικά μαθηματικά έργα, καθώς και αραβικές μεταφράσεις ελληνικών έργων μεταφράζονται στα λατινικά κυρίως στην Ισπανία και τη Σικελία. Την εποχή εκείνη το επίπεδο των αραβικών Μαθηματικών ήταν υψηλότερο από αυτό του δυτικού κόσμου και άσκησε σημαντική επίδραση στην ανάπτυξη της επιστήμης στην Ευρώπη. Έτσι στο έργο του Λεονάρδου της Πίζας (Leonardo Pisano ή Fibonacci, 1180-1250) διαπιστώνει κανείς επίγνωση των έργων του Αμπού Καμίλ (περίπου 850-930), ενώ στις τριγωνομετρικές μελέτες του Ι. Ρεγιομοντάνου (J. Regiomontanus, 1436-1476) είναι πρόδηλα τα ίχνη του έργου του Νασίρ αντ-Ντιν ατ Τουσί (1201-1274). Το ανθρωπιστικό κίνημα δεν προσέφερε τίποτα καινούργιο στη μαθηματική δημιουργία καθαυτή, αλλά οι φιλολογικές σπουδές έκαναν προσιτά τα κλασικά έργα των μαθημα-

[3] Ο όρος «Αραβικός» χρησιμοποιείται με την έννοια όχι της εθνικής καταγωγής των επιστημόνων (αφού αρκετοί από τους ονομαζόμενους «Άραβες» επιστήμονες ζούσαν στην Περσία, τη Συρία και σε άλλες χώρες), αλλά με την έννοια της γλώσσας που ήταν γραμμένα τα έργα τους, που ήταν πάντα η Αραβική.

τικών της αρχαιότητας. Έτσι, τον 16ο αι. υπήρχαν π.χ. πάνω από εκατό εκδόσεις των «Στοιχείων» του Ευκλείδη.

Μια άλλη σημαντική πηγή διάδοσης της Αρχιμήδειας παράδοσης που αρχίζει από τον 6ο αι. είναι η απολεσθείσα συλλογή του Ισιδώρου, του αρχιτέκτονα του ναού της Αγίας Σοφίας στην Κωνσταντινούπολη, με τα διασωθέντα σχόλια του μαθητή του Ευτοκίου, που έκαναν γνωστά από πολύ νωρίς τα έργα του Αρχιμήδη στους μαθηματικούς της Δύσης και άσκησαν επίδραση στον Νικόλαο Κουζάνο, τον Λεονάρντο ντα Βίντσι (1452-1519), τον Μαυρόλυκο και τον Ν. Ταρτάλια (N. Tartaglia, περίπου 1500-1557).

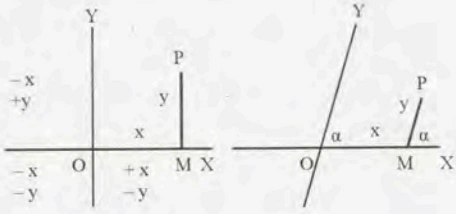
Στη διάρκεια των Μέσων Χρόνων ο χαρακτήρας της Γεωμετρίας παραμένει πολύ κοντά στο χαρακτήρα της Γεωμετρίας των Ελληνιστικών χρόνων. Από τη μια, ακολουθεί την ελληνική γεωμετρική παράδοση των Ευκλείδη, Αρχιμήδη, Απολλωνίου, και από την άλλη, εδραιώνεται η διάκριση ανάμεσα στη θεωρητική και την πρακτική Γεωμετρία με το έργο του Χιού του Αγ. Βίκτορος (Hugh of Saint Victor) που εκδίδεται στο Παρίσι γύρω στο 1130. Η δεύτερη αυτή τάση, που εκτείνεται από το 12ο ως το 16ο αι., χαρακτηρίζεται από τον προσανατολισμό στην εμπειρική Γεωμετρία, τη σύνδεσή της με τις υπολογιστικές μεθόδους και τη χρήση εργαλείων μέτρησης. Ένα άλλο δημιούργημα της Ευρωπαϊκής Αναγέννησης, που συνδέεται με την τέχνη και την αρχιτεκτονική, είναι η ανάπτυξη της θεωρίας της προοπτικής στα έργα των Βιτέλο (Vitelo, περίπου 1225-1280), Λ. Μπ. Αλμπέρτι (L.B. Alberti, 1404-1472), ντελα Φραντσέσκα, ντα Βίντσι (L. da Vinci, 1452-1519) και Ντύρερ (A. Dürer, 1471-1528).

5. Η Γεωμετρία του 17ου και 18ου αι.

Η γοργή ανάπτυξη της Γεωμετρίας το 17ο αι. στηρίζεται εν μέρει στη συνειδητή συνέχιση του αρχαίου κλασσικού μαθηματικού ιδεώδους, αλλά και την αφομοίωση της επιστήμης του Αραβικού κόσμου. Ο Χούυχενς (Huygens, 1629-1695) και ο Νεύτωνας (I. Newton, 1642-1727) θεωρούσαν την ελληνική Γεωμετρία ως πρότυπο αυστηρότητας. Η Γεωμετρία του Απολλωνίου ήταν το έναυσμα νέων προσεγγίσεων στη Γεωμετρία, όπως η μέθοδος των Καρτεσιανών συντεταγμένων και η προβολική Γεωμετρία. Την ίδια περίοδο η ανάπτυξη του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, που αποτέλεσε το μεγαλύτερο μαθηματικό επίτευγμα του 17ου αι. και ανέδειξε σε ξεχωριστό κλάδο τη μελέτη της *συναρτησιακής* εξάρτησης μεταξύ δύο μεγεθών, οδήγησε στη γένεση νέων επιστημονικών κλάδων των Μαθηματικών και την ανάδειξη της ανάλυσης ως βασικού μαθηματικού κλάδου, αντί της Γεωμετρίας.

Πιέρ Φερμά (1601-1665)

Με την Αναλυτική Γεωμετρία είχε βρεθεί ένας καθολικός τρόπος «μετάφρασης» των προβλημάτων της Γεωμετρίας στη γλώσσα της Άλγεβρας και τη συνακόλουθη ανάλυση και λύση τους με καθαρά αλγεβρικές και αναλυτικές μεθόδους. Από την άλλη, άνοιξαν νέες δυνατότητες εποπτικής ερμηνείας των αλγεβρικών και αναλυτικών γεγονότων με τη βοήθεια της Γεωμετρίας. Η δεύτερη αυτή δυνατότητα είχε τον περιορισμό ότι ο χώρος εθεωρείτο τρισδιάστατος. Αυτό συνέτεινε στο να θεωρούνται η Αριθμητική, η Άλγεβρα και ο διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός ως κλάδοι των «καθαρών». Μαθηματικών, που ασχολούνται με αριθμούς και μεγέθη και τις συναρτησιακές τους εξαρτήσεις, ενώ η Γεωμετρία ως «εφαρμοσμένη» επιστήμη που εφαρμόζει και ερμηνεύει τα αποτελέσματα των καθαρών Μαθηματικών. Μέχρι το τέλος του 17ου αι. η εκτεταμένη εφαρμογή των αναλυτικών μεθόδων, η αφομοίωση των εφαρμοσμένων κλάδων από το σώμα των «καθαρών» μαθηματικών και η υιοθέτηση μιας πιο πραγματιστικής αντίληψης για θέματα λογικής αυστηρότητας αντικατέστησε το παραδοσιακό ελληνικό επιστημονικό ιδεώδες.

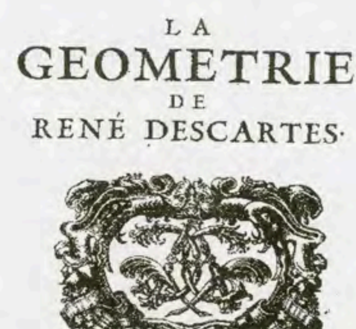


Καρτεσιανές συντεταγμένες.

Η γένεση της αναλυτικής Γεωμετρίας. Οι δύο ιστορικές πηγές της νέας Γεωμετρίας ήταν η γεωμετρική παράδοση του Απολλωνίου και του Πάππου, από την μια, και η αλγεβρική παράδοση της ιταλικής Αναγέννησης που αποκορυφώθηκε στο έργο του Φ. Βιέτ (F. Viète, 1540-1603) «Εισαγωγή στην αναλυτική τέχνη» (*In artem analyticem isagoge*, 1591), όπου εισάγεται η έννοια της αλγεβρικής μεταβλητής την οποία ο Βιέτ συμβολίζει με κεφαλαία φωνήεντα (*A*, *E*, *I*, *O*, *U*).

Η αναλυτική τέχνη του Βιέτ εφαρμόστηκε από τον Φερμά (P. Fermat) και τον Ντεκάρτ στη μελέτη καμπυλών, ειδικότερα στην Απολλώνια θεωρία των γεωμετρικών τόπων, όπως αυτή διασώθηκε στη «Συναγωγή» του Πάππου. Στο έργο του «Εισαγωγή στους τόπους στο επίπεδο και το χώρο» (*Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*) ο Φερμά καταλήγει στη διατύπωση της βασικής αρχής της αναλυτικής Γεωμετρίας που συνδέει δύο διαφορετικές κλάσεις μαθηματικών αντικειμένων: τις γεωμετρικές καμπύλες και τις αλγεβρικές εξισώσεις. Σε άλλη εργασία του το 1636 αποδεικνύει ότι αν η αλγεβρική εξίσωση είναι τετράγωνική, τότε η καμπύλη είναι κωνική τομή.

Η εμφάνιση της «Γεωμετρίας» (*La Géométrie*, 1637) του Ντεκάρτ (Descartes, 1596-1650) σηματοδοτεί τη γένεση της αναλυτικής Γεωμετρίας με την εγκατάλειψη του αλγεβρικού συμβολισμού του Βιέτ που χρησιμοποιεί ο Φερμά, την εισαγωγή γραμμάτων από το τέλος του αλφαβήτου (*x*, *y*, *z*) για το συμβολισμό μεταβλητών και παραμέτρων και τη σύνδεση των καμπυλών και των εξισώσεων με τη βοήθεια της γενικής ιδέας του (πλαγιογωνίου, στον Ντεκάρτ) συστήματος συντεταγμένων. Με τον τρόπο αυτό οι γεωμετρικές σχέσεις εκφράζονται μέσω μιας αναλυτικής συναρτησιακής εξάρτησης και ο Ντεκάρτ χρησιμοποιεί την αλγεβρική προσέγγιση για να βρει τις λύσεις των γεωμετρικών προβλημάτων


LA
GEOMETRIE.
DE
RENÉ DESCARTES.

A PARIS,
Chez CHARLES ANGOT, ruë saint Iacques, au Lion d'or.
M. DC. LXIV.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

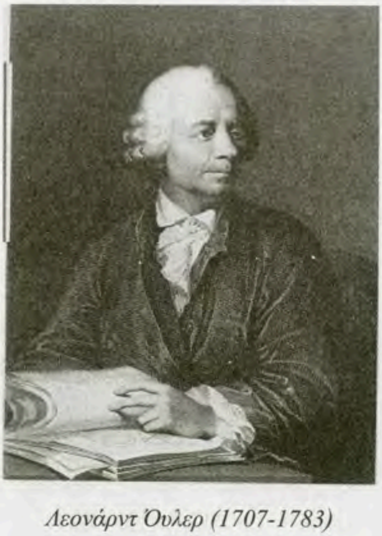
Η «Γεωμετρία» του Ντεκάρτ (1644)

με τη βοήθεια «εργαλείων» που αποτελούν γενικεύσεις του κανόνα και του διαβήτη. Όμως η έννοια των «εργαλείων» του Ντεκάρτ απέκλειε τις καμπύλες που κατασκευάζονται με κινηματικές διαδικασίες (π.χ. την έλικα του Αρχιμήδη). Κατά συνέπεια, η γεωμετρική καμπύλη για τον Ντεκάρτ περιορίζεται σε αυτήν που μπορεί να εκφραστεί ως πολυώνυμο $f(x, y) = 0$ πεπερασμένου βαθμού με δύο μεταβλητές.

Η εφαρμογή στη Γεωμετρία των μεθόδων του απειροστικού λογισμού. Μετά τον Ντεκάρτ, η αναλυτική Γεωμετρία αναπτύχθηκε από τους μαθηματικούς της ομάδας της Leiden που είχαν συσπειρωθεί γύρω από το Δανό μαθηματικό Φ. βαν Σχόοτεν (F. van Schooten, 1615-1660). Το 1679 ο Γάλλος μαθηματικός Φ. λα Ίρ (Ph. La Hire) εισάγει καρτεσιανές συντεταγμένες στο χώρο, αλλά η αναλυτική Γεωμετρία στο χώρο ήταν ουσιαστικά έργο του Α. Παράν (A. Parent) το 1700 που συνεχίστηκε από τον Γ. Μπερνούλλι (J. Bernoulli, 1667-1748), τον Λ. Όυλερ (L. Euler) και τον Ι. Χέρμαν (I. Hermann).

Αυτό όμως που οδήγησε σε πραγματικό μετασχηματισμό της Γεωμετρίας ήταν ο συνδυασμός της αναλυτικής Γεωμετρίας με τις μεθόδους του απειροστικού λογισμού του Νεύτωνα και του Λάιμπνιτς. Η αρχή γίνεται με τη συστηματική μελέτη των καμπυλών τρίτου βαθμού από τον Νεύτωνα (1704) και ανώτερου βαθμού από τους Στέρλινγκ (J. Stirling, 1695-1770), Μακλώριν (C. Maclaurin, 1698-1746), και Μπρέικενριντζ (W. Braikenridge, 1700-1769). Όμως, ο μετασχηματισμός αυτός της Γεωμετρίας σηματοδοτείται από την πρωτότυπη έκθεση της αναλυτικής Γεωμετρίας του Όυλερ, το 1748, στο δεύτερο τόμο της «Εισαγωγής στην ανάλυση των απειροστών» (*Introductio in analysin infinitorum*), όπου, εγκαταλείποντας τις παραδοσιακές μεθόδους του Νεύτωνα, επιχειρεί συστηματικά να λύσει όλα τα γεωμετρικά προβλήματα με τις μεθόδους της Άλγεβρας και της Ανάλυσης.

Η παραπέρα ανάπτυξη της αναλυτικής Γεωμετρίας οδηγεί πλέον στη διαφοροποίηση δύο νέων κλάδων: της διαφορικής Γεωμετρίας και της προβολικής Γεωμετρίας. Μεμονωμένες έννοιες της *διαφορικής Γεωμετρίας* απαντώνται ήδη από το 17ο αι., όπως η ακτίνα καμπυλότητας (Κέπλερ 1604), οι ενειλιγμένες και εξειλιγμένες καμπύλες (Χούυχενς 1673) κ.ά. Όμως οι έννοιες αυτές παρέμεναν τμήμα της Ανάλυσης. Η διαφορική Γεωμετρία ανεξαρτητοποιείται ως κλάδος με τη μελέτη καμπυλών και επιφανειών στο χώρο και την εφαρμογή των μέσων της ανάλυσης στην αναλυτική Γεωμετρία του χώρου. Η διαδικασία εγκαινιάζεται με το έργο του Α. Κλαιρώ (A.C. Clairaut, 1713-1765) «Έρευνες για τις καμπύλες διπλής καμπυλότητας» (1731), όπου εφαρμόζονται μέθοδοι του απειροστικού και ολοκληρωτικού λογισμού στην τρισδιάστατη αναλυτική Γεωμετρία, ειδικότερα σε προβλήματα εφαπτομένων και καθέτων σε καμπύλες του χώρου, εφαπτόμενου επιπέδου σε επιφάνεια πάνω στην οποία βρίσκεται δεδομένη καμπύλη κ.α. Επέκταση της διαφορικής Γεωμετρίας στη μελέτη επιφανειών πραγματοποιείται με τις «Έρευνες για την καμπυλότητα των επιφανειών» (1760) του Λ. Όυλερ. Με



Λεονάρντ Όυλερ (1707-1783)

τις εργασίες των Γ. Μόνζ (G. Monge, 1780, 1784/5, 1795, 1801) και Λαγκράντζ (Lagrange, 1775) ολοκληρώνεται η φάση της διαμόρφωσης της διαφορικής Γεωμετρίας ως κλάδου που έχει αντικείμενο οποιεσδήποτε λείες καμπύλες και επιφάνειες, τις οικογένειές τους (δηλαδή συνεχή σύνολα καμπυλών και επιφανειών) και τους μετασχηματισμούς τους.

Γκάσπαρντ Μόνζ (1746-1810).

Η *προβολική Γεωμετρία* έλκει την καταγωγή της στο πρώτο μισό του 17ου αι. στα έργα του Ντεζάργκ (G. Desargues, 1639) και του Πασκάλ, κατά τη μελέτη προβλημάτων απεικόνισης σωμάτων στο επίπεδο. Αντικείμενό της είναι αρχικά οι ιδιότητες των επιπέδων σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες όταν τα σχήματα προβάλλονται από ένα επίπεδο σε ένα άλλο. Αν και το έργο του Ντεζάργκ έτυχε καλής υποδοχής από τον Ντεκάρτ και τον Μπ. Πασκάλ, η ιδιόμορφη ορολογία του συνέτεινε στο να καθυστερήσει η αφομοίωση των ιδεών του μέχρι τις αρχές του 19ου αι. και τις εργασίες του Γάλλου μαθηματικού Ζ. Πονσελέ (J. Poncelet, 1788-1867). Ο τελευταίος ήταν μαθητής του Γκ. Μόνζ, του δημιουργού της λεγόμενης παραστατικής Γεωμετρίας, η οποία απετέλεσε τον πυρήνα της προβολικής Γεωμετρίας.

Ζάν Βίκτωρ Πονσελέ (1788-1867).

Οι απαρχές της *παραστατικής Γεωμετρίας* ανάγονται στη θεωρία της προοπτικής του 15ου-16ου αι. και στα μεταγενέστερα έργα κυρίως των Λα Ίρ (1711) και Λάμπερτ (J. Lambert, 1759). Στο έργο του Μόνζ «Παραστατική Γεωμετρία» (1799) η επιστήμη αυτή αποκτά τη σημερινή της μορφή. Στο έργο αυτό εξετάζονται οι ορθογώνιες προβολές τρισδιάστατων αντικειμένων σε δύο κάθετα επίπεδα. Κατά τις προβολές αυτές κάποιες ιδιότητες παραμένουν αναλλοίωτες και άλλες χάνονται. Για παράδειγμα, η εφαπτομένη σε μια καμπύλη προβάλλεται κατά μία ευθεία που είναι επίσης εφαπτομένη στην προβολή της καμπύλης, οι παράλληλες (ή κάθετες) ευθείες προβάλλονται κατά παράλληλες (ή κάθετες) ευθείες κτλ. Όμως, τα μήκη και οι γωνίες των σχημάτων δεν παραμένουν ίδια κατά την προβολή. Ο Πονσελέ επικέντρωσε την προσοχή του στις ιδιότητες εκείνες που παραμένουν αναλλοίωτες κατά την προβολή ενός σχήματος από ένα επίπεδο σε άλλο. Το 1822 δημοσίευσε την «Πραγματεία για τις προβολικές ιδιότητες των σχημάτων», όπου αποδεικνύει ότι οι κωνικές τομές είναι προβολικά σχήματα, οπότε για τη λύση ενός προβλήματος που αφορά μια κωνική τομή μπορούμε να προβάλουμε την κωνική σε περιφέρεια, να λύσουμε το πρόβλημα για την περιφέρεια και να μεταφέρουμε τη λύση στην κωνική με την αντίστροφη προβολή.

Άρθουρ Καίλεϋ (1821-1895)

Εν μέσω έντονων συζητήσεων ανάμεσα στον Πονσελέ, τον Ζεργκόν (J.D. Gergonne, 1771-1859), τον Μαίμπιους (A.F. Möbius, 1790-1868), τον Σαλ (M. Chasles, 1793-1880) και τον Πλύκερ (J. Plücker, 1801-1868) διαμορφώνεται μια από τις θαυμαστές αρχές των Μαθηματικών – η *αρχή του δυϊσμού*. Η αρχή αυτή, όπως διατυπώνεται από τον Ζεργκόν, συσχετίζει με κάθε σημείο μία ευθεία και με κάθε ευθεία ένα σημείο έτσι ώστε:

Από δύο οποιαδήποτε σημεία άγεται μία ευθεία.	Οποιεσδήποτε δύο ευθείες έχουν κοινό σημείο.
Τρία σημεία είναι συνευθειακά, δηλαδή βρίσκονται στην ίδια ευθεία.	Τρεις ευθείες είναι συντρέχουσες, δηλαδή ανήκουν στην ίδια δέσμη.
Τρίγωνο σχηματίζεται από τρία μη συνευθειακά σημεία και τρεις ευθείες που τα συνδέουν ανά δύο.	Το δυϊκό σχήμα σχηματίζεται από τρεις μη συντρέχουσες ευθείες και τα τρία σημεία τομής των ευθειών αυτών ανά δύο (το σχήμα αυτό είναι επίσης τρίγωνο).

Το θαυμαστό χαρακτηριστικό της αρχής αυτής είναι ότι «μεταφράζοντας» μια απόδειξη της Γεωμετρίας και αντικαθιστώντας τη λέξη «σημείο» με τη λέξη «ευθεία», το κατηγόρημα «βρίσκεται» με το «διέρχεται», το «είναι συνευθειακά» με το «είναι συντρέχουσες» κτλ. λαμβάνουμε ένα νέο εν γένει θεώρημα. Η αρχή αυτή αντανακλά τη θεμελιακή ιδιότητα του προβολικού επιπέδου ότι οι ευθείες και τα σημεία είναι «ισότιμα» γεωμετρικά αντικείμενα.

Το 18ο αι. εμφανίζεται και *η ιδέα του πολυδιάστατου χώρου*, αρχικά αμυδρά στο φιλοσοφικό έργο του Καντ (1746). Στο θέμα αυτό επιστρέφει το 1764 ο Νταλαμπέρ όπου στο λήμμα «διάσταση» της Εγκυκλοπαίδειας *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* προτείνει να θεωρηθεί ο χρόνος ως τέταρτη διάσταση. Όμως η πολυδιάστατη αναλυτική Γεωμετρία, όπου τα σημεία ορίζονται με ν συντεταγμένες θεμελιώθηκε από τον Α. Καίλεϋ (Arthur Cayley, 1843). Η διανυσματική προσέγγιση της Γεωμετρίας του πολυδιάστατου χώρου, που οδήγησε αργότερα στον αξιωματικό ορισμό του διανυσματικού χώρου, αναπτύχθηκε από τον Χ. Γκράσσμαν (H. Grassman) και δέκα χρόνια αργότερα ο Ρήμαν (Riemann) εισήγαγε την ιδέα του πολυδιάστατου χώρου μεταβλητής καμπυλότητας, του λεγόμενου «Ρημάνειου χώρου».

Αν και ο κύριος όγκος της μαθηματικής έρευνας μετά τα μέσα του 17ου αι. είχε επικεντρωθεί γύρω από την Ανάλυση, στη Γεωμετρία παρατηρείται στροφή προς τα θεμέλια της κλασικής Γεωμετρίας, και συγκεκριμένα στο 5ο αίτημα των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Σε ολόκληρη τη διάρκεια του 17ου-19ου αι. οι προσπάθειες απόδειξης του αιτήματος των Παραλλήλων συνεχίζονται ανελλειπώς (Σακκέρι, Λάμπερτ, Μπερτράν, Λεζάντρ, Γκούριεφ). Οι απόπειρές τους, αν και αποδείχθηκαν άκαρπες, έδωσαν ωστόσο τη δυνατότητα στους γεωμέτρες να μελετήσουν βαθύτερα και πιο συστηματικά τις ιδιότητες του κλασικού Ευκλείδειου χώρου (βλ. *Η θεωρία των παραλλήλων*).

6. Η Γεωμετρία του 19ου αι.

Στη διάρκεια του 19ου αι. αρχίζουν να αναπτύσσονται οι πιο αφηρημένες γεωμετρικές θεωρίες που συνεχίζουν να εξελίσσονται και να εφαρμόζονται μέχρι σήμερα. Η Γεωμετρία τον αιώνα αυτό αναπτύσσεται σε τρεις βασικές κατευθύνσεις: Πρώτον, αναπτύσσονται μέθοδοι της Γεωμετρίας του συνήθους χώρου, κυρίως στο πεδίο της διαφορικής Γεωμετρίας. Δεύτερον, διευρύνεται η έννοια του χώρου με την ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών. Τρίτον, παρατηρείται διείσδυση των αλγεβρικών μεθόδων στη Γεωμετρία με την ανάπτυξη της αλγεβρικής Γεωμετρίας των καμπυλών και των επιφανειών και της Γεωμετρίας των ομάδων μετασχηματισμών, που οδήγησαν τον Κλάιν στον ορισμό των διάφορων γεωμετριών ως θεωριών αναλλοίωτων ορισμένων ομάδων μετασχηματισμών. Ο 19ος αι. δύει με την αξιωματικοποίηση της Γεωμετρίας από τον Χίλμπερτ.

Κάρλ Φρίντριχ Γκάους (1777-1855)

Στο πεδίο της διαφορικής Γεωμετρίας δημιουργείται η διαφορική Γεωμετρία επιφανειών από τον Γκάους (K.F. Gauss, 1827), τον Μίντινγκ (E.F.A.G. Minding, 1837-40, 1830) και τον Πέτερσον (C. Peterson, 1853). Αναπτύσσεται η προβολική Γεωμετρία (Πονσελέ, Στέινερ, Στάουντ κ.ά.) και ο Χ. Γκράσσμαν κατασκευάζει την ομοπαραλληλική και τη μετρική Γεωμετρία πολυδιάστατου διανυσματικού χώρου.

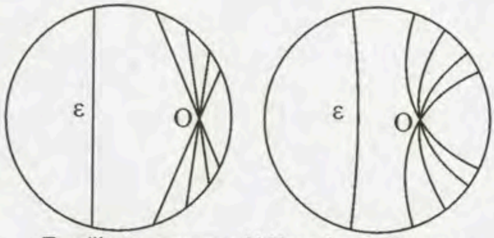
Η δημιουργία των μη Ευκλείδειων γεωμετριών. Η σημαντικότερη όμως καινοτομία του αιώνα είναι η δημιουργία των μη Ευκλείδειων γεωμετριών και η συνυφασμένη με αυτήν ιδέα για την ύπαρξη χώρων διάφορων ειδών. Αυτό οδήγησε στη διάκριση ανάμεσα στην έννοια του «μαθηματικού χώρου» και του «φυσικού χώρου».

Ήδη από τη δεκαετία του ’90 του 18ου αι. ο Γκάους, ασχολούμενος με τη θεωρία των παραλλήλων, κατέληξε σε συμπεράσματα που αμφισβητούσαν την «αλήθεια» της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ωστόσο ο Γκάους δε δημοσίευσε ποτέ τις εργασίες του αυτές φοβούμενος τις αντιδράσεις που θα αντιμετώπιζαν τα συμπεράσματά του. Οι πρώτες εργασίες όπου εκτίθεται η κατασκευή μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας δημοσιεύθηκαν ανεξάρτητα η μία από την άλλη από το Ρώσο Νικολάι Ι. Λομπατσέφσκι στο «Περί των θεμελίων της Γεωμετρίας» (1829) και τον Ούγγρο Γιάνος Μπόλυαϊ (W.F. Bolyai) στο εικοσιτετρασέλιδο «Παράρτημα» του βιβλίου του πατέρα του Φαρκάς Μπόλυαϊ, που εκδόθηκε το 1832 πριν από το ίδιο το βιβλίο. Ο Λομπατσέφσκι αντικαθιστά το 5ο αίτημα του Ευκλείδη με το αξίωμα: από σημείο εκτός ευθείας άγονται τουλάχιστον δύο παράλληλοι στην ευθεία. Προσαρτώντας το αξίωμα αυτό στα υπόλοιπα αξιώματα της Γεωμετρίας ο Λομπατσέφσκι περιέγραψε, λογικά άψογα, έναν νέο τρισδιάστατο χώρο, διαφορετικό από τον Ευκλείδειο. Ο Λομπατσέφσκι θεωρούσε τη Γεωμετρία του ως «δυνατή» θεωρία των σχέσεων του χώρου και την ονόμασε «φανταστική Γεωμετρία». Οι τρεις βασικές ιδέες στις οποίες στηρίζεται η νέα ανακάλυψη είναι: Πρώτον, ότι μπορούμε να διανοηθούμε όχι μία, αλλά πολλές γεωμετρίες. Δεύτερον, ότι οι νέες θεωρίες μπορούν να προκύψουν με τροποποίηση και γενίκευση των αξιωμάτων της Γεωμετρίας. Τρίτον, ότι η αλήθεια της γεωμετρικής θεωρίας, με την έννοια της αντιστοιχίας της στις ιδιότητες του πραγματικού κόσμου είναι θέμα των φυσικών επιστημών.

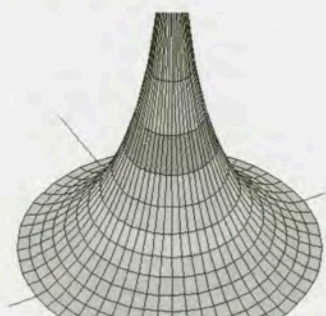
Νικολάι Λομπατσέφσκι (1793-1856).

Μοντέλα (ερμηνείες) της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Οι ιδέες του Λομπατσέφσκι και του Μπόλυαϊ δεν έγιναν αντιληπτές στην εποχή τους. Αν και ένα δοκίμιο του Λομπατσέφσκι δημοσιεύθηκε στα γαλλικά το 1837, η μαθηματική κοινότητα δεν ήταν έτοιμη να δεχθεί τόσο ρηξικέλευθες ιδέες. Η σημασία τους απότιμήθηκε μόνον μετά το θάνατό τους, το 1868, όταν ο Ιταλός μαθηματικός Ε. Μπελτράμι (E. Beltrami, 1835-1900) στην εργασία του «Δοκίμιο περί της ερμηνείας της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας» κατασκεύασε ένα μοντέλο δισδιάστατης μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας με μέσα της τρισδιάστατης Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Το μοντέλο αυτό λαμβάνεται στην εκ περιστροφής επιφάνεια της λεγόμενης *έλκουσας*[4] περί την ασύμπτωτή της και ονομάζεται *ψευδοσφαίρα*.

Όμως το μοντέλο του Μπελτράμι μας προσφέρει μια ερμηνεία μόνο της Γεωμετρίας σε ένα τμήμα του επιπέδου του Λομπατσέφσκι και όχι σε όλο το επίπεδο ή πολύ περισσότερο όχι σε όλο το χώρο. Αργότερα, το 1901 ο Ντ. Χίλμπερτ απέδειξε ότι στον Ευκλείδειο χώρο δεν υπάρχει εν γένει κανονική επιφάνεια, η Γεωμετρία στην οποία να ταυτίζεται με τη Γεωμετρία ολόκληρου του υπερβολικού επιπέδου.



Το αξίωμα των παραλλήλων δεν ισχύει στο μοντέλο του Κλάιν (αριστερά) και το μοντέλο του Πουανκαρέ (δεξιά), αφού από το «σημείο» Ο που δε βρίσκεται στην «ευθεία» ε διέρχονται οσεσδήποτε «ευθείες» που δεν τέμνουν την ε.


Το άνω ήμισυ της ψευδοσφαίρας. Η επιφάνεια της ψευδοσφαίρας αν και είναι άπειρη έχει πεπερασμένο εμβαδόν και το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου πάνω σε αυτήν είναι μικρότερο του 2π.

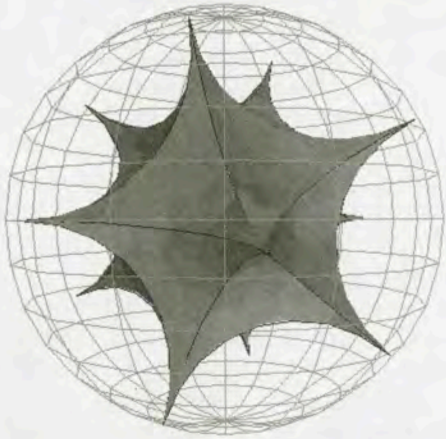
Το 1871 ο Φ. Κλάιν, στην εργασία του «Για τη λεγόμενη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία», πρότεινε ένα μοντέλο τόσο ολόκληρου του υπερβολικού επιπέδου, όσο και του χώρου. Ως υπερβολικό επίπεδο λαμβάνεται το εσωτερικό ενός κύκλου (δηλαδή ο κυκλικός δίσκος χωρίς την περιφέρειά του). «Σημεία» του είναι τα σημεία του εσωτερικού του κύκλου, «ευθείες» οι χορδές (χωρίς τα άκρα τους). Αντίστοιχα, ως υπερβολικός χώρος μπορεί να ορισθεί το εσωτερικό σφαίρας.

Αργότερα το 1882, ο Α. Πουανκαρέ κατασκεύασε ένα άλλο μοντέλο. Ως υπερβολικό επίπεδο λαμβάνεται και πάλι το εσωτερικό ενός κύκλου αλλά ως ευθείες τα τόξα που τέμνουν την περιφέρεια του κύκλου κατά ορθή γωνία. Ανάλογα κατασκευάζεται και το μοντέλο του χώρου που είναι το εσωτερικό σφαίρας.

---

[4] Έλκουσα είναι η καμπύλη, που το μήκος της εφαπτομένης της (από το σημείο επαφής ως τον άξονα των τετμημένων) είναι σταθερό.

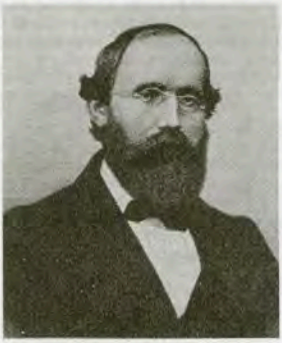
Η κατασκευή διάφορων μοντέλων της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας με μέσα της Ευκλείδειας, εκτός από το ότι προσέφερε μια εποπτική παράσταση της υπερβολικής Γεωμετρίας, απέδειξε και ότι το αίτημα των παραλλήλων είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα αξιώματα της Γεωμετρίας. Όμως η θεμελιακή σημασία της ανακάλυψης της μη-Ευκλείδειας Γεωμετρίας δε συνίσταται τόσο στην απόδειξη της ανεξαρτησίας του αιτήματος των παραλλήλων, όσο στο γεγονός ότι η λογική κατασκευή μιας Γεωμετρίας είναι ανεξάρτητη από την εποπτική της παράσταση.



Κανονικό εικοσάεδρο στον υπερβολικό χώρο του μοντέλου του Πουανκαρέ.

Η γενικευμένη έννοια του μαθηματικού χώρου. Θεμελιακά νέο στάδιο στην εξέλιξη της Γεωμετρίας εγκαινιάζεται το 1854 με την περίφημη ομιλία του Ρήμαν στο Πανεπιστήμιο της Γοτίγγης (Gottingen) «Περί των υποθέσεων που αποτελούν τις βάσεις της Γεωμετρίας», όπου διατυπώνει τη γενικευμένη έννοια του μαθηματικού χώρου ως συνεχές σύνολο οποιωνδήποτε ομογενών αντικειμένων ή φαινομένων (τα οποία θεωρούνται ως σημεία του χώρου) και εισάγει την έννοια του χώρου με οποιονδήποτε κανόνα μέτρησης των μηκών με απειροστά βήματα. Αυτός ο κανόνας δίνεται με την προϋπόθεση ότι τα απειροστά τμήματα του γεωμετρικού χώρου είναι Ευκλείδεια.

Ο ορισμός αυτός αποτελεί γενίκευση της έννοιας της εσωτερικής Γεωμετρίας επιφανειών που ορίζεται από τον Γκάους ως η θεωρία των ιδιοτήτων των επιφανειών που μπορούν να αποδειχθούν με μέτρηση των μηκών των καμπυλών σε αυτές. Επίσης, ο Ρήμαν γενικεύει την έννοια του πολυδιάστατου χώρου με την έννοια του απειροδιάστατου χώρου. Οι εξελίξεις αυτές ανοίγουν νέες προοπτικές στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας και δημιουργείται η λεγόμενη Ρημάνεια Γεωμετρία, η οποία βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στη θεωρία της σχετικότητας.



Μπέρνχαρντ Ρήμαν (1826-1866).

Το Πρόγραμμα του Ερλάνγκεν (Erlangen). Το 1872 στην ομιλία του «Συγκριτική επισκόπηση των νεώτερων γεωμετρικών ερευνών» στο Πανεπιστήμιο Ερλάνγκεν ο Γερμανός μαθηματικός Φ. Κλάιν (F. Klein) επιχειρεί μια ενοποίηση των διάφορων γεωμετριών (με εξαίρεση τις γεωμετρίες σε επιφάνειες μεταβλητής καμπυλότητας) με βάση την ιδέα της αναλλοίωτης σε κάποια ομάδα μετασχηματισμών.

Κατά το *Πρόγραμμα του Ερλάνγκεν* η Ευκλείδεια και η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία προτείνεται να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις της προβολικής Γεωμετρίας. Και στις δύο περιπτώσεις το κοινό χαρακτηριστικό είναι ότι αφορούν ένα σύνολο σημείων, που λέγεται «χώρος», και μια ομάδα μετασχηματισμών που επιτρέπουν την κίνηση των σχημάτων μέσα στο χώρο χωρίς να αλλάζουν οι ουσιαστικές τους ιδιότητες. Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία του επιπέδου ως ίσα ορίζονται τα σχήματα όταν υπάρχει κίνηση (γεωμετρικός μετασχηματισμός) που να μεταφέρει το ένα επί του άλλου. Όμως μπορούμε να επιλέξουμε κάποιο άλλο σύνολο γεωμετρικών μετασχηματισμών και να ορίσουμε «ίσα» τα σχήματα που λαμβάνονται το ένα από το άλλο με τη βοήθεια αυτού του νέου συνόλου των μετασχηματισμών. Έτσι ερχόμαστε στην ιδέα της «Γεωμετρίας» που εξετάζει τις ιδιότητες των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες από ένα σύνολο μετασχηματισμών. Το σύνολο των μετασχηματισμών πρέπει να αποτελεί ομάδα. Έτσι, η θεωρία που μελετά τις ιδιότητες των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες σε όλους τους μετασχηματισμούς της ομάδας, λέγεται *γεωμετρία* της ομάδας αυτής. Επιλέγοντας διαφορετικές ομάδες μετασχηματισμών λαμβάνονται διαφορετικές γεωμετρίες. Αν ως ομάδα μετασχηματισμών ληφθούν η στροφή, η συμμετρία, η παράλληλη μετατόπιση και οι συνθέσεις τους, που δεν αλλάζουν το μήκος ή τη γωνία, που είναι οι βασικές ιδιότητες στην Ευκλείδεια γεωμετρία, τότε η λαμβανόμενη Γεωμετρία είναι η Ευκλείδεια. Αν ως ομάδα ληφθούν οι προβολικοί μετασχηματισμοί που μετασχηματίζουν έναν κύκλο (ή κωνική τομή) στον εαυτό του, τότε η λαμβανόμενη Γεωμετρία είναι η υπερβολική. Έτσι, οι διάφορες γεωμετρίες έχουν διαφορετικούς χώρους και διαφορετικές ομάδες μετασχηματισμών, και τα σχήματα έχουν διαφορερικές βασικές ιδιότητες.

Η αξιωματικοποίηση της Γεωμετρίας. Η γενική τάση για αυστηρότητα στα Μαθηματικά που σημειώνεται στο δεύτερο μισό του 19ου αι. και η λύση του προβλήματος των παραλλήλων έθεσαν το πρόβλημα της έρευνας ολόκληρου του συστήματος των αξιωμάτων της Γεωμετρίας (βλ. *Η αξιωματική μέθοδος*). Οι έρευνες αυτές έδειξαν ότι το σύστημα των αξιωμάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δεν είναι πλήρες. Έτσι ο Μ. Πας (M. Pasch, 1843-1930) κατασκεύασε το 1882 ένα σύστημα αξιωμάτων για τις σχέσεις μεταξύ σημείων, ευθύγραμμων τμημάτων και τμημάτων του επιπέδου και διατύπωσε επίσης αξιώματα διάταξης και ισοδυναμίας (συμπεριλαμβανομένου και του αξιώματος του Αρχιμήδη). Όμως το σύστημα των αξιωμάτων του Πας είναι αρκετά σύνθετο, επειδή λαμβάνει ως αρχικά αντικείμενα πεπερασμένα τμήματα της ευθείας και του επιπέδου και όχι ολόκληρη την ευθεία ή το επίπεδο.

Το 1899 ο Ιταλός μαθηματικός Μ. Πιερί (M. Pieri) πρότεινε ένα άλλο επίσης πολύ σύνθετο σύστημα αξιωμάτων με δύο μόνον αρχικά αντικείμενα: το σημείο και την κίνηση.

Το κλασικό σήμερα σύστημα αξιωμάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας προτάθηκε, ταυτόχρονα με το σύστημα του Πιερί, από τον Ντ. Χίλμπερτ στο έργο του «Τα θεμέλια της Γεωμετρίας». Το σύστημα αυτό αίρει τις δυσκολίες του συστήματος του Πας λαμβάνοντας ως αρχικά αντικείμενα το σημείο, την ευθεία και το επίπεδο, τα οποία απαιτείται να ικανοποιούν κάποια αξιώματα (βλ. *Η αξιωματική μέθοδος*). Κατά την αξιωματική προσέγγιση του Χίλμπερτ (και του Πας) δεν απαιτείται να διευκρινιστεί η φύση των αρχικών αντικειμένων, δηλαδή τι είναι σημείο, ευθεία ή επίπεδο. Το μόνο που υποθέτουμε είναι ότι αυτά ικανοποιούν τις σχέσεις που διατυπώνονται στα αξιώματα. Για το λόγο αυτό η Ευκλείδεια Γεωμετρία του Χίλμπερτ επιτρέπει διαφορετικές συγκεκριμένες ερμηνείες, ανάλογα με τη φύση των αρχικών αντικειμένων στα οποία εφαρμόζεται.

Στον 20ο αι., παρά τον υψηλό βαθμό αφαίρεσης των Μαθηματικών, η Γεωμετρία παραμένει βασική πηγή ανάπτυξης της πλούσιας και γόνιμης μαθηματικής διαίσθησης. Οι περισσότεροι μαθηματικοί σκέπτονται και σήμερα με γεωμετρικά σχήματα και παραστάσεις, ακόμα και όταν παρουσιάζουν τα τελικά τους αποτελέσματα με αναλυτική μορφή, καταπνίγοντας έτσι τα ίχνη της γεωμετρικής τους εποπτείας στα άδυτα των τύπων.

5. Χρήση των ιστορικών σημειωμάτων

Η εισαγωγή της ιστορίας των Μαθηματικών στα διδακτικά βιβλία της Β/βμιας εκπαίδευσης είναι ασαφής και αόριστη για πολλούς εκπαιδευτικούς. Σύμφωνα με μια άποψη, η ιστορία των Μαθηματικών θεωρείται ίσως χρήσιμη επειδή μπορεί να παρακινήσει τους λιγότερο ικανούς στα μαθηματικά μαθητές με την αφήγηση ανεκδόταν γύρω από ιστορικά πρόσωπα, θρύλων γύρω από την ανακάλυψη μεγάλων θεωρημάτων ή ακόμα και να τονώσει τα αισθήματα νοσταλγίας για τους χρυσούς αιώνες και τα επιτεύγματα των προγόνων μας. Στο πλαίσιο αυτό, τα ιστορικά σημειώματα περιορίζονταν συνήθως στην ασφυκτικά συνοπτική ιστορία της απόδοσης της πατρότητας μιας ανακάλυψης και τη χρονολογική παράθεση γεγονότων, χωρίς να εξετάζεται γιατί οι άνθρωποι ασχολήθηκαν με τα προβλήματα που λύνουν τα Μαθηματικά και τι σημαίνει η λύση τους για τα υπόλοιπα πεδία των Μαθηματικών και της γνώσης.

Το θέμα της αξιοποίησης της ιστορίας στα μαθήματα Μαθηματικών τα τελευταία χρόνια έχει γίνει πλέον αντικείμενο συστηματικών μελετών. Στις ΗΠΑ, π.χ. η Μαθηματική Εταιρεία χρηματοδοτείται από το Εθνικό Ίδρυμα Επιστημών (National Science Foundation) για την ανάπτυξη του Ινστιτούτου Ιστορίας των Μαθηματικών και της Αξιοποίησής της στη Διδασκαλία (Institute in the History of Mathematics and its Use in Teaching), το οποίο έχει ως στόχο να αυξήσει την παρουσία της ιστορίας στα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών.

Ακολουθώντας τις διεθνείς εξελίξεις το βιβλίο του μαθητή παρουσιάζει μια σειρά ιστορικών σημειωμάτων στα οποία επιχειρείται να δοθεί ακριβής (αν και όχι διεξοδική) περιγραφή του προβλήματος που τέθηκε και των εννοιολογικών εργαλείων που εφαρμόστηκαν για να λυθεί. Επικεντρώνεται η προσοχή σε διαδικασίες γένεσης νέων μαθηματικών ιδεών (π.χ. η γένεση των μη Ευκλείδειων γεωμετριών, της αξιωματικής μεθόδου κτλ.) ή αλλαγής των αντιλήψεων των ίδιων των μαθηματικών για τις έννοιες και τις μεθόδους που χρησιμοποιούσαν. Θίγεται επίσης το θέμα της διάδοσης των μαθηματικών εννοιών ανάμεσα σε διαφορετικές μαθηματικές και πολιτισμικές παραδόσεις και άλλα.

Είναι προφανές ότι τα σημειώματα αυτά δεν μπορούν να είναι ολοκληρωμένες μελέτες πάνω στα θέματα που θίγονται. Ούτε είναι δυνατόν να δοθούν διεξοδικές οδηγίες για την αξιοποίηση του ιστορικού υλικού μέσα στην τάξη. Για το λόγο αυτό συμπεριλαμβάνουμε τον παρακάτω (σελ. 42) πολύ βασικό βιβλιογραφικό οδηγό προκειμένου ο ενδιαφερόμενος εκπαιδευτικός να μπορέσει να προσανατολιστεί και να βρει μια άκρη στον κυκεώνα της βιβλιογραφίας. Ωστόσο, ως γενική αρχή προτείνεται στον εκπαιδευτικό να συμβουλεύεται τις πρωτότυπες πηγές κατά την «πλοήγησή» του στον ιστορικό χρόνο, είτε για να αφηγηθεί κάποιο ιστορικό επεισόδιο στην τάξη είτε για να καθοδηγήσει και να ελέγξει συνθετικές εργασίες των μαθητών του.

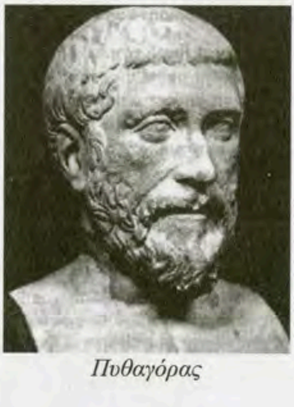
Τα ιστορικά σημειώματα και τα παραρτήματα δεν αποτελούν διδακτέα, επομένως ούτε και εξεταστέα ύλη. Εξάλλου είναι γνωστό ότι η διδακτέα ύλη μπορεί να μεταβληθεί. Από το υλικό αυτό οι μαθητές μπορούν να αντλούν θέματα για συνθετικές-δημιουργικές εργασίες και δραστηριότητες, καθώς μία τουλάχιστον σε ένα γραπτό μάθημα είναι υποχρεωτική για τους μαθητές της Α΄ και Β΄ Λυκείου.

Το παρακάτω συμπληρωματικό ιστορικό υλικό για το Πυθαγόρειο θεώρημα μπορεί να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό να συνδέσει το θεώρημα αυτό με το θεώρημα του Φερμά, ένα από τα πιο θρυλικά προβλήματα που βρήκε λύση με τη δύση του 20ου αιώνα.

Επίσης κατά την παρουσίαση ενδείκνυται η χρήση εποπτικού υλικού (διαφάνειες, σλάιτς, CD-ROM, Διαδίκτυο, κλπ.) που θα επιτρέψουν στο μαθητή να «μεταφερθεί» στην ιστορική εποχή που εξετάζεται.

Το Πυθαγόρειο θεώρημα

Το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι από τα πιο κομψά, αλλά ταυτόχρονα πιο βαθιά θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, με ευρύτατη εφαρμογή και πέρα από τα πλαίσια της Γεωμετρίας, στην Αριθμητική, την Άλγεβρα, και τις Φυσικές Επιστήμες. Αποδεικνύει μία σχέση ανάμεσα στις πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου που διατυπώνεται σύντομα ως εξής: το τετράγωνο της υποτείνουσας ορθογώνιου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του. Η θεμελιακή σημασία του Πυθαγόρειου θεωρήματος, ως αποτέλεσμα μετρικής υφής, μπορεί να εκτιμηθεί καλύτερα, αν λάβουμε υπόψη μας ότι το 19ο αιώνα αποτέλεσε το πρότυπο για τον ορισμό της μετρικής και των μη Ευκλείδειων χώρων.


Πυθαγόρας

Οι Πυθαγόρειες τριάδες. Η αριθμητική ερμηνεία και καταγωγή του θεωρήματος σχετίζεται με τις Πυθαγόρειες τριάδες.

Στο «Σχόλιο στο πρώτο Βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη» ο Πρόκλος αναφέρει δύο μεθόδους εύρεσης Πυθαγόρειων τριάδων στην αρχαία Ελλάδα. Μία μέθοδο αποδίδει στους Πυθαγόρειους και άλλη στον Πλάτωνα. Κατά τον Πρόκλο, οι Πυθαγόρειοι ξεκινούσαν από περιττό αριθμό, τον οποίο θεωρούσαν ως τη μικρή κάθετο, εύρισκαν το τετράγωνό του, αφαιρούσαν τη μονάδα και θεωρούσαν το ήμισυ του λαμβανόμενου αριθμού ως μεγάλη κάθετο. Προσθέτοντας τη μονάδα στο αποτέλεσμα αυτό υπολόγιζαν την υποτείνουσα, δηλαδή οι Πυθαγόρειοι είχαν βρει την εξής λύση

$$x = \alpha, \quad y = \frac{\alpha^2 - 1}{2}, \quad z = \frac{\alpha^2 + 1}{2},$$

όπου $\alpha = 2k+1$. Έτσι, η στοιχειώδης Πυθαγόρεια τριάδα λαμβάνεται από το πρώτο περιττό αριθμό, το τρία[1].

Ο Πλάτων, από την άλλη, ξεκινούσε από άρτιο αριθμό και, βρίσκοντας το μισό του, λάμβανε τις Πυθαγόρειες τριάδες με τον εξής κανόνα

$$x = \alpha, \quad y = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1, \quad z = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1,$$

όπου $\alpha = 2k$. Στην περίπτωση αυτή η στοιχειώδης Πυθαγόρεια τριάδα λαμβάνεται από το δεύτερο άρτιο αριθμό, το τέσσερα.

Όμως ούτε η μέθοδος των Πυθαγορείων ούτε του Πλάτωνα δε δίνουν *όλες* τις Πυθαγόρειες τριάδες. Ο κανόνας που δίνει όλες τις τριάδες εξαρτάται από δύο παραμέτρους, ενώ στους παραπάνω τύπους εμφανίζεται μία μόνο παράμετρος, η α. Ο κανόνας που δίνει όλες τις τριάδες απαντάται για πρώτη φορά στο Βιβλίο X των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Το πρώτο λήμμα στην Πρόταση 29 ζητεί να βρεθούν δύο τετράγωνοι αριθμοί, ώστε το άθροισμά τους να είναι τετράγωνος.

Για τη λύση του προβλήματος αυτού ο Ευκλείδης παίρνει δύο «όμοιους επίπεδους» αριθμούς, δηλαδή δύο αριθμούς της μορφής $AB = \mu\nu p^2$ και $B\Gamma=\mu\nu q^2$. Υποθέτει ότι οι αριθμοί αυτοί είναι ταυτόχρονα ή άρτιοι ή περιττοί, οπότε η διαφορά τους $AB - B\Gamma$ είναι πάντοτε άρτιος. Έστω $A\Delta$ το μισό αυτής της διαφοράς. Τότε από την Πρόταση 6 του δεύτερου Βιβλίου των «Στοιχείων» προκύπτει ότι

$$AB \cdot B\Gamma + \Gamma\Delta^2 = B\Delta^2 \qquad \text{ή}$$

$$(\mu\nu p^2)(\mu\nu q^2) + \left(\frac{\mu\nu p^2 - \mu\nu q^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mu\nu p^2 + \mu\nu q^2}{2}\right)^2,$$

δηλαδή λαμβάνεται λύση με τη μορφή

$$x = \frac{\mu\nu p^2 - \mu\nu q^2}{2}, \; y = \mu\nu pq, \; z = \frac{\mu\nu p^2 + \mu\nu q^2}{2}.$$

[1] Για τους Πυθαγόρειους, και για τους αρχαίους Έλληνες εν γένει, η μονάδα δεν ήταν αριθμός, έτσι ο πρώτος περιττός ήταν το 3.

Αν διαιρέσουμε τις παραστάσεις για τα x, y, z με τον κοινό παράγοντα μν και πολλαπλασιάσουμε με 2, λαμβάνουμε τη λύση στη συνήθη μορφή

$$x = p^2 - q^2, \quad y = 2pq, \quad z = p^2 + q^2,$$

την οποία χρησιμοποιεί αργότερα και ο Διόφαντος.

Οι παραπάνω τύποι είναι θεμελιώδεις στη θεωρία των Πυθαγόρειων τριάδων. Η ύπαρξη άπειρων Πυθαγόρειων τριάδων (και μάλιστα άπειρων στοιχειωδών τριάδων) μας επιτρέπει να θέσουμε προβλήματα εύρεσης Πυθαγόρειων τριάδων που να ικανοποιούν κάποιες συμπληρωματικές συνθήκες. Έτσι, π.χ. μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχουν άπειρες Πυθαγόρειες τριάδες, στις οποίες οι δύο από τους τρεις αριθμούς να είναι διαδοχικοί, ή ότι ο ένας από τους τρεις αριθμούς είναι τετράγωνος (ωστόσο, δεν υπάρχουν τριάδες στις οποίες οι δύο αριθμοί να είναι τετράγωνοι). Το πιο αξιόλογο παράδειγμα τέτοιου είδους είναι το ακόλουθο πολύ δύσκολο

> πρόβλημα του Φερμά: να βρεθούν οι Πυθαγόρειες τριάδες (x, y, z) για τις οποίες οι αριθμοί x+y και *z* είναι τετράγωνοι.

Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν άπειρες τέτοιες Πυθαγόρειες τριάδες, αλλά όλες αποτελούνται από πολύ μεγάλους αριθμούς. Η πιο μικρή από αυτές έχει τη μορφή

$$x=4\,565\,486\,027\,761,\; y=1\,061\,652\,293\,520,\; z=4\,687\,298\,610\,289,$$

όπου $x+y=(2\,372\,159)^2$ και $z=(2\,165\,017)^2$.

Το Μεγάλο Θεώρημα του Φερμά. Όπως αναζητήσαμε τις λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

είναι φυσικό να τεθεί το αντίστοιχο ερώτημα για ανάλογες εξισώσεις ανώτερου βαθμού, όπως

$$x^3 + y^3 = z^3$$

$$x^4 + y^4 = z^4$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

και γενικά $x^\nu + y^\nu = z^\nu$.

Πιέρ Φερμά (1608-1665

Στη σκέψη αυτή οδηγήθηκε το 1637 ο Γάλλος μαθηματικός Πιέρ Φερμά. Μελετώντας το όγδοο πρόβλημα του Βιβλίου ΙΙ της «Αριθμητικής» του Διόφαντου το οποίο ζητά να αναλυθεί δεδομένος τετράγωνος αριθμός α^2 σε άθροισμα δύο τετραγώνων, ο Φερμά διατύπωσε την εξής υπόθεση:

> Δεν είναι δυνατόν να αναλυθεί ούτε κύβος σε δύο κύβους ούτε διτετράγωνος σε δύο διτετράγωνους ούτε εν γένει βαθμός άνω του τετραγώνου σε δύο βαθμούς με τον ίδιο εκθέτη. Ανακάλυψα γι' αυτό μια αληθινά θαυμάσια απόδειξη αλλά δε μου φτάνει το περιθώριο να τη γράψω.

Η υπόθεση αυτή ονομάστηκε Μεγάλο Θεώρημα του Φερμά. Όμως, όσο κι αν έψαξαν οι ιστορικοί στα χειρόγραφα του Φερμά, δε βρήκαν την απόδειξη αυτή. Ο Φερμά αναφέρεται στην υπόθεση αυτή στην αλληλογραφία του, αλλά μόνο για τις περιπτώσεις του κύβου και του διτετράγωνου. Για την τελευταία περίπτωση βρέθηκε μάλιστα και η απόδειξη του Φερμά. Βρίσκεται στα σχόλιά του στα «Αριθμητικά» του Διοφάντου, όπου αποδεικνύει ότι το εμβαδόν ορθογώνιου τριγώνου δεν μπορεί να είναι τετράγωνο. Από αυτό έπεται ότι δεν υπάρχουν δύο διτετράγωνοι, το άθροισμα των οποίων να ισούται με τετράγωνο, και επομένως και με διτετράγωνο. Η απόδειξη αυτή γίνεται με τη λεγόμενη μέθοδο της απείρου καθόδου, την οποία ο Φερμά επεξηγεί σε επιστολή του στον Πιέρ ντε Καρκαβύ (Pierre de Carcavy, πέθανε το 1684) το 1659 (η οποία δημοσιεύθηκε το 1879).

Η πρώτη απόπειρα να αποδειχθεί το θεώρημα αυτό στην περίπτωση των κύβων (ν=3) έγινε από τον Άραβα μαθηματικό αλ-Χουντζαντί περίπου στο 1000 μ.Χ. Όμως η απόδειξή του δε διασώθηκε και μάλιστα εικάζεται ότι δεν μπορεί να ήταν σωστή. Η πρώτη γνωστή απόδειξη αποδίδεται στον Λ. Όυλερ, ο οποίος την ανακοίνωσε σε επιστολή του στον Γκόλντμπαχ (Christian Goldbach, 1690-1764) στις 26 Απριλίου 1755. Ο Όυλερ απέδειξε το Θεώρημα του Φερμά και στην περίπτωση ν=4 το 1747.

Το επόμενο βήμα έγινε από την Σ. Ζερμαίν (S. Germain, 1776-1831). Σύμφωνα με ένα θεώρημα, αν ο ν και ο 2ν+1 είναι πρώτοι, τότε από την ισότητα $x^{\nu} + y^{\nu} = z^{\nu}$ έπεται ότι ένας από τους x,y,z είναι διαιρετός διά του *ν*. Τότε το θεώρημα του Φερμά χωρίζεται σε δύο περιπτώσεις:

(α) Κανείς από τους x, y, z δεν είναι διαιρετός διά ν.

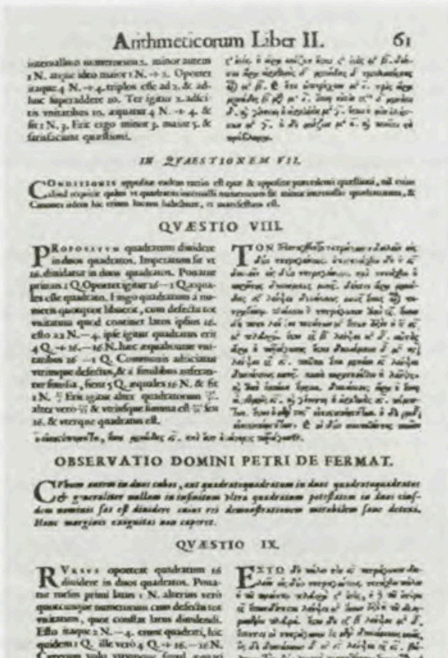
(β) Ένας και μόνον ένας από τους x, y, z είναι διαιρετός διά ν.

Η Ζερμαίν απέδειξε την περίπτωση (α) για όλα τα ν που είναι μικρότερα του 100. Αργότερα ο Λεζάντρ (A.M. Legendre, 1752-1833) επέκτεινε την απόδειξη για όλα τα *n* που είναι μικρότερα του 197.

Η περίπτωση (β) για ν = 5 χωρίζεται σε δύο υποπεριπτώσεις: όταν ένας από τους x, y, z είναι άρτιος και όταν ένας από αυτούς είναι διαιρετός διά του 5. Αντίστοιχα, διακρίνονται δύο περιπτώσεις:

(β_1) Ο αριθμός που είναι διαιρετός διά του 5 είναι ο άρτιος.

(β_2) Ο άρτιος και ο αριθμός που είναι διαιρετός διά του 5 είναι διαφορετικοί αριθμοί.


Arithmeticorum Liber II. 61

IN QVAESTIONEM VII.

QVÆSTIO VIII.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

Το Πρόβλημα 8 του Βιβλίου ΙΙ στην «Αριθμητική» του Διοφάντου που ενέπνευσε τον Φερμά

Η περίπτωση ($β_1$) αποδείχθηκε από το Γερμανό μαθηματικό Ντίριχλετ (P.G.L. Dirichlet, 1805-1859) και παρουσιάστηκε στην Ακαδημία των Παρισίων τον Ιούλιο του 1825. Ο Λεζάντρ απέδειξε την περίπτωση ($β_2$) και η όλη απόδειξη για την περίπτωση (β) για ν = 5 δημοσιεύτηκε το Σεπτέμβριο του 1825.

Γκερντ Φάλτινγκς
(1954 –)

Το 1832 ο Ντίριχλετ και πάλι απέδειξε το Θεώρημα του Φερμά στην περίπτωση ν = 14, ενώ η περίπτωση ν = 7 αποδείχθηκε το 1839 από τον Λαμέ (G. Lamé, 1795-1870).

Το 1847 αποδείχτηκε ιδιαίτερα γόνιμη χρονιά για τη μελέτη του Θεωρήματος του Φερμά. Την 1η Μαρτίου ο Λαμέ ανακοίνωσε στην Ακαδημία των Παρισίων ότι είχε αποδείξει το Θεώρημα του Φερμά, βασιζόμενος σε μια υπόδειξη του Λιουβίλ (Joseph Liouville, 1809-1882) να αναλυθεί η $x^ν + y^ν = z^ν$ σε γραμμικούς παράγοντες στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Όμως στην ίδια συνεδρίαση της Ακαδημίας ο Λιουβίλ εξέφρασε επιφυλάξεις για την προσέγγιση του Λαμέ, επειδή θεωρούσε αμφίβολο αν η ανάλυση αυτή ήταν μονοσήμαντη.

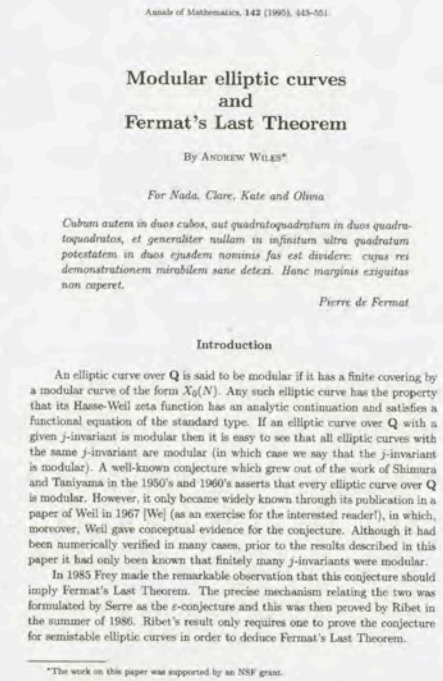
Γιουτάκα Τανιγιάμα
(1927-1958)

Στις 24 Μαΐου του ίδιου έτους ο Λιουβίλ παρουσίασε στην Ακαδημία μια επιστολή του Κούμμερ (E.E. Kummer, 1810-1893), συνοδευόμενη από ένα ανάτυπο μιας εργασίας του 1844 όπου αποδείκνυε ότι η μονοσήμαντη ανάλυση δεν ήταν δυνατή, αλλά το πρόβλημα μπορούσε να αρθεί με την εισαγωγή των λεγόμενων ιδανικών μιγαδικών αριθμών, που είχε προτείνει το 1856. Ο Κούμμερ είχε εφαρμόσει τη θεωρία του για να βρει συνθήκες υπό τις οποίες ένας πρώτος αριθμός είναι κανονικός. Ένας πρώτος αριθμός p είναι κανονικός αν δε διαιρεί τους αριθμητές των αριθμών Μπερνούλλι. Οι αριθμοί (Γιάκομπ) Μπερνούλλι B_n ορίζονται ως οι ρητοί αριθμοί της μορφής $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$.

Το Σεπτέμβριο του 1847 ο Κούμμερ ανακοινώνει στην Ακαδημία του Βερολίνου μια απόδειξη του Θεωρήματος του Φερμά για κανονικούς πρώτους. Ο Κούμμερ αποδεικνύει ότι όλοι οι πρώτοι αριθμοί έως το 37 είναι κανονικοί, αλλά το 37 είναι ο πρώτος μη κανονικός αριθμός, επειδή διαιρεί το B_{32}.

Οι μόνοι μικρότεροι από το 100 πρώτοι αριθμοί που δεν είναι κανονικοί είναι ο 37, ο 59 και ο 67. Έτσι η έρευνα επικεντρώθηκε στο να αποδειχθεί το Θεώρημα του Φερμά για τους αριθμούς αυτούς. Η προσέγγιση αυτή ακολουθήθηκε από τον Κούμμερ, τον Μιριμάνοφ (Mirimanoff), τον Βίφεριχ (Wieferich), τον Φουρτβένγκλερ (Furtwängler), τον Βαντίβερ (Vandiver) κ.ά. Όμως, το 1915 ο Δανός Γιένσεν (Jensen, 1859-1925) απέδειξε ότι οι μη κανονικοί αριθμοί είναι άπειροι. Το αποτέλεσμα αυτό σήμανε αδιέξοδο για την προσέγγιση αυτή.

Ως το 1993 η μόνη ένδειξη που συτηρούσε τις ελπίδες των μαθηματικών τι το Θεώρημα του Φερμά είναι αληές, ήταν η επαλήθευσή του με τη χρήση λεκτρονικών υπολογιστών έως την τιμή =4.000.000. Οι ελπίδες αναπτερώθηκαν όλις το 1983, όταν ο νεαρός Γερμανός αθηματικός Γκερντ Φάλτινγκς (G. altings) απέδειξε ότι για κάθε $\nu \geq 3$ πάρχει το πολύ πεπερασμένος αριθμός ρώτων αριθμών x, y, z με $x^\nu + y^\nu = z^\nu$. Ομως το ότι ο πεπερασμένος αυτός αιθμός είναι το 0 σε όλες τις περιπτώσεις ε φαινόταν εύκολο να αποδειχθεί με άποια επέκταση των μεθόδων του Φάλινγκς.


Annals of Mathematics, **142** (1995), 443-551

Modular elliptic curves
and
Fermat's Last Theorem

By Andrew Wiles*

For Nada, Clare, Kate and Olivia

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Pierre de Fermat

Introduction

An elliptic curve over **Q** is said to be modular if it has a finite covering by a modular curve of the form $X_0(N)$. Any such elliptic curve has the property that its Hasse-Weil zeta function has an analytic continuation and satisfies a functional equation of the standard type. If an elliptic curve over **Q** with a given j-invariant is modular then it is easy to see that all elliptic curves with the same j-invariant are modular (in which case we say that the j-invariant is modular). A well-known conjecture which grew out of the work of Shimura and Taniyama in the 1950's and 1960's asserts that every elliptic curve over **Q** is modular. However, it only became widely known through its publication in a paper of Weil in 1967 [We] (as an exercise for the interested reader!), in which, moreover, Weil gave conceptual evidence for the conjecture. Although it had been numerically verified in many cases, prior to the results described in this paper it had only been known that finitely many j-invariants were modular.

In 1985 Frey made the remarkable observation that this conjecture should imply Fermat's Last Theorem. The precise mechanism relating the two was formulated by Serre as the ε-conjecture and this was then proved by Ribet in the summer of 1986. Ribet's result only requires one to prove the conjecture for semistable elliptic curves in order to deduce Fermat's Last Theorem.

*The work on this paper was supported by an NSF grant.

Η απόδειξη του Ουάιλς στο "Annals of Mathematics" τόμος 142 του 1995.

Η τελευταία πράξη άρχισε το 1955 το πλαίσιο έρευνας που φαινομενικά εν είχε σχέση με το Θεώρημα του Φερά. Ο Γιαπωνέζος μαθηματικός Γ. Τανιιάμα έθεσε δύο ανοιχτά προβλήματα τη θεωρία ελλειπτικών καμπυλών. Αυά οδήγησαν τον Βέιλ (A. Weil, 1906-998) και τον Σιμούρα στη διατύπωση ης λεγόμενης εικασίας Σιμούρα-Γανιγιάμα-Βέιλ. Το 1986 αποσαφηνίτηκε η σχέση της εικασίας αυτής με το Θεώρημα του Φερμά από τον Φρέυ (Frey) αποκαλύπτοντας ότι το τελευταίο συνδέεται ε θεμελιακές ιδιότητες του χώρου. Περαιτέρω έρευνες έδειξαν ότι αντιπαράδειγμα την εικασία Σιμούρα-Τανιγιάμα-Βέιλ σήμαινε αντιπαράδειγμα στο Θεώρημα του Φερμά.

Το 1993 ο Βρετανός μαθηματικός Άντριου Ουάιλς (Andrew Wiles) έδωσε τρεις ιαλέξεις στις 21-23 Ιουνίου στο Ινστιτούτο Ισαάκ Νεύτων στο Καίμπριτζ, στην τελευαία από τις οποίες ανακοίνωσε την απόδειξη του Θεωρήματος του Φερμά ως απόρροια ου κύριου αποτελέσματος της έρευνάς του. Είχε αποδείξει την εικασία Σιμούρα-Γανιγιάμα-Βέιλ για μια κλάση παραδειγμάτων που ταν αναγκαία για την απόδειξη του Θεωρήματος του Φερμά.


Άντριου Ουάιλς (1953 –)

Στη συνέχεια ο Ουάιλς επανεξέτασε την απόδειξη ποκαθιστώντας κάποια κενά που εντόπισε εκ των στέρων και στις 6 Οκτωβρίου έστειλε τη νέα απόδειη σε τρεις μαθηματικούς, μεταξύ των οποίων και ο φάλτινγκς. Η τελική απόδειξη δημοσιεύτηκε το 1995 το περιοδικό *Annals of Mathematics* δίνοντας τέλος τις προσπάθειες του πιο θρυλικού ίσως μαθηματικού ροβλήματος.

6. Βιβλιογραφία

Παραθέτουμε εδώ έναν επιλεκτικό κατάλογο βιβλίων ταξινομημένων κατά κατηγορίες που μπορεί να βοηθήσει τον εκεπαιδευτικό που θέλει να ασχοληθεί ειδικότερα με κάποιον τομέα.

Γενικά έργα Γεωμετρίας

Η στοιχειώδης Γεωμετρία από ανώτερη σκοπιά και με ιστορικές παρεμβάσεις εξετάζεται στο:

Moise E. *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* Addison Wesley, Reading, Mass., 1963.

Το βιβλίο αυτό εξετάζει επίσης το ρόλο του Αρχιμήδειου αξιώματος στη Γεωμετρία και περιγράφει ένα διατεταγμένο σώμα που δεν είναι Αρχιμήδειο. Αρκετό υλικό περιέχεται επίσης στο:

Coxeter H.S. *Introduction to Geometry.* Wiley, New York, 1961.

Το θέμα των κανονικών πολυέδρων εξετάζεται από τη γενικότερη σκοπιά της έννοιας της κυρτότητας των γεωμετρικών σχημάτων στο

Yaglom I.M., Boltyanskii W.G. *Convex Figures.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961.

Από τα πιο σημαντικά «εκλαϊκευτικά» έργα είναι τα παρακάτω δύο βιβλία των:

Hilbert D., Cohn-Vossen S. *Geometry and the Imagination.* Chelsea, New York, 1957.

Klein F. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint.* Vol. 1: *Arithmetic, Algebra, Analysis.* Vol. 2: *Geometry*. Dover, New York, 1948.

Μεμονωμένα ιστορικά επεισόδια εξετάζονται στο:

Meschkowski H. *Ways of Thought of Great Mathematicians.* Holden-Day, San Francisco, 1964.

Λεξικά και εγκυκλοπαίδειες

Encyclopaedia Britannica.

Gillispie C.C. (ed.) *Dictionary of Scientific Biography.* New York: Scribner's 1970-1990.

Grattan-Guinness I. (ed.), *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences.* London, 1994.

Ένας σύγχρονος και εύχρηστος βιβλιογραφικός οδηγός εκδόθηκε από τον

Dauben J.W. (ed.) *The History of Mathematics from Antiquity to the Present. A Selective Bibliography*. New York: Garland, 1985.

Κλασικά μαθηματικά έργα

Οι μόνες εκδόσεις αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών στη νεοελληνική γλώσσα είναι του Ε.Σ. Σταμάτη. Από αυτές η έκδοση του Αρχιμήδη είναι η πληρέστερη διεθνώς.

Σταμάτη Ευάγγελου Σ. *Ευκλείδου Στοιχεία*. Τόμοι 1-4. Αθήναι: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων. 1975.

— *Αρχιμήδους Άπαντα*. Τόμοι Α (μέρος α΄ και β΄), Β, Γ. Αθήναι: Έκδοσις του Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος. 1970.

— *Απολλωνίου Κωνικά*. Τόμοι Α-Δ. Αθήναι: Έκδοσις του Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος. 1975.

— *Αριστάρχου Σαμίου Περί μεγεθών και αποστημάτων ηλίου και σελήνης*. Αθήναι, 1980.

Οι καθιερωμένες αγγλικές μεταφράσεις αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών είναι του:

Heath T.L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Cambridge, 1908.

— *Diophantus of Alexandria*. Cambridge, 1910.

— *Archimedes*. Cambridge, 1897.

— *Apollonius of Perga*. Cambridge, 1896.

Τα σωζόμενα σε αραβική μετάφραση Βιβλία των «Κωνικών» του Απολλωνίου εκδόθηκαν από τον:

Toomer G.L. *Apollonius, Conics, Books V to VII. The Arab Translation of the Lost Greek Original*. New York: Springer, 1990.

Στα ελληνικά υπάρχει επίσης το θεμελιώδες έργο του

Χίλμπερτ Ντ. *Τα θεμέλια της Γεωμετρίας*. Αθήνα.

Ιστορία των Μαθηματικών

Τρεις πολύ καλές επισκοπήσεις της ιστορίας των Μαθηματικών, οι δύο από τις οποίες είναι μεταφρασμένες και στα ελληνικά, είναι

Boyer C.B., Merzbach U.C. *Η ιστορία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Πνευματικός.

Cooke R. *The History of Mathematics: A Brief Course*. Wiley, 1997.

Struik D.J. *Συνοπτική ιστορία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Ζαχαρόπουλος.

Για την ιστορία των Μαθηματικών στους μη Ευρωπαϊκούς πολιτισμούς:

Βάιμαν Α.Α. *Σουμερο-Βαβυλωνιακά μαθηματικά*. Μόσχα, 1961 (στα ρώσικα).

Gillings R.J. *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. Cambridge, MA., 1982.

Neugebauer O. *Οι θετικές επιστήμες στην αρχαιότητα*. Αθήνα: Μορφωτικό Ίδρυμα της Εθνικής Τραπέζης.

Neugebauer O. and Sachs A. *Mathematical Cuneiform Texts*. New Haven, CT., 1945.

van der Waerden B.L. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. New York, 1983.

Ειδικότερα, για την ιστορία των κινέζικων Μαθηματικών:

Libbrecht U. *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century*. Cambridge, MIT Press, 1973.

Martzloff J.C. *Histoire des Mathematiques chinoises*. Paris, Masson, 1987. Αγγλική μετάφραση *History of Chinese Mathematics*. New York, Springer.

Μπεριόσκινα Ε.Ι. *Τα Μαθηματικά της αρχαίας Κίνας*. Μόσχα, 1980 (στα ρώσικα).

Needham J. *Science and Civilization in China*. Vol. 3, *Mathematics and the Sciences of the Heavens and Earth*. Cambridge, 1959.

Για την ιστορία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών:

Artmann B. *Euclid. The Creation of Mathemaics*. Springer Verlag, 1999.

Dijksterhuis E. *Archimedes*. Copenhagen, 1956.

Heath T.L. *A History of Greek Mathem*atics, 2 vols. Oxford, 1922.

Knorr W.R. *The Evolution of the Euclidean Elements*, Dordrecht: Reidel, 1975.

— *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Boston, 1986.

— *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*. Birkhauser, 1989.

Mueller I. *Philosophy of Mathematics and Deductive Srtucture in Euclid 's "Elements"*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1981.

van der Waerden B.L. *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Η πιο βαθιά μελέτη για την ιστορία των κωνικών τομών είναι του:

Zeuthen H.G. *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*. Copenhagen, 1886.

Η καλύτερη επισκόπηση και έγκυρη παρουσίαση της ιστορίας των μεσαιωνικών μαθηματικών τόσο στην Ευρωπαϊκή παράδοση, όσο και στην Ινδία, την Κίνα και τον Αραβικό κόσμο, είναι του:

Juschkewitsch A.P. *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*. Leipzig: Teubner, 1964 (μετάφραση από τη ρωσική έκδοση του 1961).

Για την ιστορία της Διοφαντικής ανάλυσης και του Θεωρήματος του Φερμά:

Aczel A. *Το τελευταίο θεώρημα του Fermat.* Αθήνα: Τροχαλία. Μετάφραση του *Fermat's last theorem: Unlocking the secret of an ancient mathematical problem* (New York, 1996).

Bashmakova I.G. *Diophantus and Diophantine Equations.* The Mathematical Association of America, 1997.

Bashmakova Slovuntin *E.I. Ιστ. της διορ. ανάλ. από τον Δ. στον Φερμά.* M. 1984 (στα ρώσικα).

Edwards H.M. *Fermat's Last Theorem: A Genetic Approach to Algebraic Number Theory.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.

Για την ιστορία της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας:

Bonola R. *Non-Euclidean Geometry: A Critical and Historical Study of its Development.* New York, 1955.

Gray J.J. *Ideas of Space: Euclidean, non-Euclidean and Relativistic.* Oxford, 1989.

Houzel C. *The birth of non-Euclidean geometry, in 1830-1930: a century of geometry*. Berlin, 1992.

Jaouiche K. *La Theorie des paralleles en pays d'Islam.* Paris: Vrin.

Rosenfeld B.A. *A history of non-Euclidean geometry: evolution of the concept of a geometric space.* New York, 1987.

Για το έργο του Χίλμπερτ

Reid C. *Hilbert*. Berlin- Heidelberg- New York, 1970.

Reid C. *Hilbert-Courant.* New York, 1986.

Weyl H. "David Hilbert and his mathematical work", *Bull. Amer. Math. Soc.* **50** (1944), 612-654.

Η αξιοποίηση της ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε μια επιλογή βιβλιογραφικών αναφορών σε άρθρα που συζητούν το πώς μπορεί να αξιοποιηθεί η ιστορία των Μαθηματικών κατά τη διδασκαλία στην τάξη. Το πρόβλημα της αξιοποίησης της ιστορίας στη στοιχειώδη και μέση εκπαίδευση έχει μελετηθεί πολύ λίγο. Έτσι οι περισσότερες αναφορές αφορούν την αξιοποίηση της ιστορίας στην ανώτατη εκπαίδευση. Όμως ο καθηγητής μπορεί να σχηματίσει μια ιδέα για την υπάρχουσα εμπειρία και τις σύγχρονες προσεγγίσεις στο θέμα αυτό.

Bos, H. J. M., "History of mathematics in the mathematics curriculum at Utrecht University," *Historia Mathematica*, **3** (1976), 473-476.

Dittrich, Alan B., "An experiment in teaching the history of mathematics," *Mathematics Teacher*, **66** (1973), 35-38.

Το επόμενο άρθρο περιγράφει ένα σεμινάριο πέντε εβδομάδων πάνω σε 19 «Μεγάλα Θεωρήματα των Μαθηματικών σε ιστορικό πλαίσιο» που είχε χρηματοδοτήσει το ίδρυμα National Endowment for the Humanities.

Dunham, William, "A mathematics seminar from the National Endowment for the Humanities," στο βιβλίο *Essays in Humanistic Mathematics*, MAA Notes #32, edited by Alvin M. White, 1993, 177-182.

Katz, Victor J., "Non-western mathematics in the university classroom," στα *Proceedings of the Sixteenth Annual Meeting of the Canadian Society for the History and Philosophy of Mathematics*, University of Victoria, May 31, June 1, 1990. Published by CSHPM 1991, edited by Francine F. Abeles, Victor J. Katz, and Robert S. D. Thomas, 63-72.

Το παραπάνω άρθρο περιγράφει παραδείγματα για το πώς μπορούν να παρουσιασθούν οι μαθηματικές ιδέες των μη Ευρωπαϊκών πολιτισμών στο μάθημα των Μαθηματικών. Περιλαμβάνει παραδείγματα μαθηματικών ιδεών από τους πολιτισμούς των Μάγια, της Ινδίας, της Κίνας, του Αραβικού κόσμου και της Κεντρικής και Βόρειας Αμερικής.

Το περίγραμμα των μαθημάτων για πέντε μνημειώδη θεωρήματα παρουσιάζεται στην εργασία του:

Laubenbacher, Reinhard C. and Pengelley, David J., "Great problems of mathematics: A course based on original sources," *American Mathematical Monthly*, **99** (1992), 313-317.

Μια εκδοχή για μαθητές περιγράφεται από τον ίδιο συγγραφέα στην εργασία:

Laubenbacher, Reinhard C. and Pengelley, David J., "Great problems of mathematics: A summer workshop for high school students," *College Mathematics Journal*, **25** (1994), 112-114.

Αφού αναλύσει τις δυσκολίες να σχεδιαστούν μαθήματα με χρήση των πηγών, ο συγγραφέας του επόμενου άρθρου εξηγεί πώς επιχείρησε ο ίδιος να λύσει τις δυσκολίες αυτές:

Siu, Man-Keung, "Mathematical thinking and history of mathematics," στο *Learn From the Masters*, edited by Frank Swetz, John Fauvel, Otto Bekken, Bengt Johansson, and Victor Katz, MAA 1995, 279-282.

Το παρακάτω άρθρο, αν και δε συνιστά μάθημα στην ιστορία των Μαθηματικών, αναλύει ορισμένα θέματα με έντονη ιστορική διάσταση:

Shenitzer, Abe, "A topics course in mathematics," στο ίδιο, 283-295.

Ο ρόλος των εργασιών στη διδασκαλία της ιστορίας των Μαθηματικών εξετάζεται στο:

Swetz, Frank J., "The use of projects in teaching the history of mathematics," *Historia Mathematica*, **9** (1982), 201-205.

Τα μαθήματα ιστορίας των μαθηματικών για εκπαιδευτικούς που έγιναν στο Πανεπιστήμιο του Βισκόνσιν παρουσιάζονται στο:

Williamson, Bruce, "History of mathematics – A course outline." *Historia Mathematica*, **6** (1979), 318-320.

Μέρος 2

Διδακτικες Οδηγιες

1. Γενικές οδηγίες

Πριν από τις οδηγίες που ακολουθούν κατά κεφάλαιο για τη διδασκαλία, οι διδάσκοντες πρέπει να έχουν υπόψη:

1. Η ακριβής διατύπωση των συλλογισμών είναι χαρακτηριστικό των Μαθηματικών και ιδιαίτερα της Γεωμετρίας.
2. Στη Γεωμετρία υπάρχει το συνεχές του χώρου, που πρέπει να κατανοήσουν οι μαθητές.
3. Η διδασκαλία πρέπει να ξεκινά με αργούς ρυθμούς για να κατανοηθούν οι πρώτες έννοιες και ο επαγωγικός συλλογισμός. Στη συνέχεια, μπορεί να επιταχυνθεί κατά την κρίση του διδάσκοντος.
4. Το διδακτικό βιβλίο είναι το βιβλίο που χρησιμοποιεί ο μαθητής και πολλές φορές το μοναδικό. Γι΄ αυτό ο διδάσκων δεν πρέπει να το αγνοεί.
5. Σε κάθε ενότητα να τονίζονται τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της και να υπογραμμίζονται τα στοιχεία υποδομής που θα χρειαστούν αργότερα.
6. Οι ώρες που αναφέρονται σε κάθε κεφάλαιο είναι ενδεικτικές. Προσαρμόζονται ανάλογα με το επίπεδο των μαθητών. Ο προγραμματισμός πρέπει να αναπροσαρμόζεται από το διδάσκοντα, ώστε να ολοκληρώνεται η διδακτέα ύλη στις εκάστοτε προβλεπόμενες ώρες ανά τάξη.
7. Αν σε κάποια ενότητα διατεθούν περισσότερες ώρες, η εμπέδωση και καλύτερη κατανόηση ίσως βοηθήσει ώστε σε κάποια άλλη ενότητα να

διατεθούν λιγότερες ώρες. Υποτίθεται ότι ο διδάσκων έχει κάνει έναν αρχικό προγραμματισμό τον οποίο αναπροσαρμόζει κατά χρονικά διαστήματα.

8. Συχνά στα γεωμετρικά κείμενα συναντάμε όρους και φράσεις που δεν έχουν αποδοθεί στην καθομιλουμένη. Οι όροι αυτοί εξηγούνται στους μαθητές, π.χ. «Ευκλείδειο αίτημα», «λήμμα».

9. Για την καλύτερη κατανόηση των προτάσεων, θα πρέπει από τους μαθητές να ζητείται η αναδιατύπωση των προτάσεων ή η απόδοση αυτών σε κοινή γλώσσα. Επίσης, οι μαθητές πρέπει να έχουν σαφή γνώση των ορισμών.

10. Τα **σύνθετα θέματα** και οι **γενικές** ασκήσεις σε κάθε κεφάλαιο απευθύνονται κυρίως σε μαθητές με ιδιαίτερη κλίση στη Γεωμετρία. Για το λόγο αυτό απαιτείται αυστηρή επιλογή των ασκήσεων που θα γίνουν στην τάξη, ανάλογα με το επίπεδο κάθε τμήματος.

2. Αξιολόγηση του μαθητή και της διδασκαλίας

Η αξιολόγηση, ως γνωστόν, γίνεται και σκοπό έχει να πληροφορήσει το διδάσκοντα κυρίως κατά πόσον επιτυγχάνονται οι στόχοι της διδασκαλίας.

Έτσι μπορεί έγκαιρα να γίνονται οι κατάλληλες παρεμβάσεις και αλλαγές στη διδασκαλία για καλύτερα αποτελέσματα. Η αξιολόγηση είναι κατά συνέπεια **παιδευτική** και αναπόσπαστα συνδεδεμένη με τη διδασκαλία. Υπάρχει βέβαια και η **διαπιστωτική.** Είναι αυτή που γίνεται συνήθως στο τέλος του χρόνου, μετά την ολοκλήρωση της ύλης. Βέβαια και η καθημερινή αξιολόγηση μπορεί να γίνεται διαπιστωτική, όταν τα αποτελέσματά της δεν οδηγούν σε παρεμβάσεις.

Ως παιδευτική (θεραπευτική) πρέπει να γίνεται σε καθημερινή βάση κατά την διδασκαλία και βέβαια μετά από κάθε ενότητα ή κεφάλαιο. Αυτή κυρίως μας ενδιαφέρει και σε αυτή κυρίως αναφέρονται τα παρακάτω.

Όταν κανείς διδάσκει προσπαθεί από τη στάση ή αντίδραση των μαθητών του να καταλάβει κατά πόσο αυτά που διδάσκει γίνονται κτήμα των μαθητών.

Αν δούμε τα αποτελέσματα μιας διδασκαλίας ως **προϊόντα,** τότε θα μπορούμε να τα κατατάξουμε σε τρεις κατηγορίες:

1η πρωτογενή προϊόντα,

2η επεξεργασμένα προϊόντα και

3η προϊόντα υψηλής τεχνολογίας.

Φυσικά τα προϊόντα της πρώτης κατηγορίας μπορούν όλοι να τα παράγουν, της δεύτερης λιγότεροι και της τρίτης ακόμη λιγότεροι μπορούν να τα παράγουν και να τα χρησιμοποιούν.

Για παράδειγμα τι είναι ευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, ημιευθεία όλοι μπορεί να ξέρουν. Να μπορούν όμως να τα διακρίνουν σε ένα σχήμα ή να βλέπουν σχέσεις μεταξύ αυτών ίσως δεν είναι όλοι ικανοί. Κάποιοι έχουν αμέσως μετά τη διδασκαλία την ικανότητα να χρησιμοποιούν τις νέες έννοιες, κάποιοι την αποκτούν αργότερα και κάποιοι πολύ αργότερα.
Με βάση τις παραπάνω σκέψεις η αξιολόγηση θα πρέπει να αναφέρεται και στα τρία επίπεδα. Γι' αυτό άλλωστε και οι ασκήσεις που υπάρχουν στο διδακτικό βιβλίο έχουν ταξινομηθεί σε ερωτήσεις **κατανόησης**, ασκήσεις **εμπέδωσης**, **αποδεικτικές** ασκήσεις, **σύνθετα θέματα** και **γενικές ασκήσεις.**

Η επιλογή των ερωτήσεων γίνεται από το διδάσκοντα και εξαρτάται κυρίως από την ιεράρχηση των διδακτικών στόχων που έχει κάνει κατά τη διδασκαλία που προηγήθηκε, τους μαθητές του και άλλες συνθήκες που επικρατούν στο σχολείο.

Για το λόγο αυτό σε κάθε κεφάλαιο θα δοθούν ενδεικτικά παραδείγματα.

Φυσικά ο διδάσκων επιλέγει τα δικά του κριτήρια σύμφωνα και με τα παραπάνω.

Θα πρέπει να τονισθεί εδώ ότι το αποτέλεσμα μιας αξιολόγησης δεν πρέπει να χρεώνεται πάντα μόνο στο μαθητή. Γιατί οι παράγοντες της μαθησιακής διαδικασίας, εκτός απο το μαθητή, είναι και ο **δάσκαλος** και το **βιβλίο.**

Επομένως αξιολόγηση του μαθητή μπορεί να σημαίνει και αξιολόγηση της διδασκαλίας. Γι' αυτό ανάλογα με το αποτέλεσμα της αξιολόγησης και το αντικείμενο που διδάσκεται, πρέπει να δοκιμάζονται και εναλλακτικοί τρόποι διδασκαλίας.

Για παράδειγμα κάποιες φορές μπορεί να είναι έντονα **ερευνητική, ανακαλυπτική** από μέρους των μαθητών με κατάλληλες βέβαια ερωτήσεις και διάλογο.

Άλλες φορές μπορεί να είναι **αυστηρά προγραμματισμένη** με φύλλο εργασίας.

Άλλοτε μπορεί να έχει τη μορφή περισσότερο της **διάλεξης.**

Άλλοτε πάλι μπορεί να γίνεται με ομάδες. Πολλές φορές η επικοινωνία μεταξύ των μαθητών για κάποιο θέμα είναι πιο αποτελεσματική, από ό,τι μεταξύ δασκάλου και μαθητή.

3. Οδηγίες για κάθε κεφάλαιο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία

Ενδεικτικός αριθμός ωρών διδασκαλίας: 1

Το κεφάλαιο αυτό αναφέρεται στο αντικείμενο και την ιστορική αναδρομή στη γέννηση και ανάπτυξη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Έχει ως γενικό διδακτικό στόχο την ομαλή μετάβαση από την πρακτική Γεωμετρία, που οι μαθητές γνώρισαν στο Γυμνάσιο, στη θεωρητική Ευκλείδεια Γεωμετρία που θα γνωρίσουν στο Λύκειο.

Για την υλοποίηση αυτού του στόχου ο διδάσκων, μπορεί να αναφέρει ότι αρκετά συμπεράσματα της πρακτικής Γεωμετρίας είναι αποτελέσματα μετρήσεων με βαθμολογημένο χάρακα ή μοιρογνωμόνιο και επομένως δεν είναι απολύτως ακριβή, παρά μόνον προσεγγίσεις. Επίσης η πρακτική Γεωμετρία δεν μπορεί να απαντήσει με βεβαιότητα σε ερωτήματα, όπως, γιατί από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο κάθετος προς αυτή ή γιατί από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται μία μόνον ευθεία. Η θεωρητική Γεωμετρία εξασφαλίζει την απόλυτη ακρίβεια και απαντά στα παραπάνω ερωτήματα με τις αποδείξεις και τα αξιώματα. Εδώ μπορεί να γίνει υπενθύμιση στους μαθητές ότι στο Γυμνάσιο, είχαν διαπιστώσει ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°. Εισάγεται έτσι η έννοια της απόδειξης και του αξιώματος, στοιχεία που διαφοροποιούν τη θεωρητική από την πρακτική Γεωμετρία. Στη συνέχεια το παράδειγμα με το τετράγωνο (σελ. 3 βιβλίο μαθητή) είναι κατατοπιστικό για τον τρόπο με τον οποίο η θεωρητική Γεωμετρία μελετά το αντικείμενό της, δηλαδή τα σχήματα. Τέλος θεωρούμε χρήσιμο να τονιστεί ο ρόλος των σχημάτων στη Γεωμετρία και προτείνουμε να αναγνωσθεί στην τάξη η ιστορική εξέλιξη της § 1.2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα

Ενδεικτικός αριθμός ωρών διδασκαλίας: 10

Με το κεφάλαιο αυτό αρχίζει ουσιαστικά η διδασκαλία του μαθήματος. Γενικός διδακτικός στόχος είναι η κατανόηση των αρχικών εννοιών και ενός πλήθους εννοιών που ορίζονται με τη βοήθεια αυτών. Επίσης, στόχος είναι η κατανόηση του ρόλου των αξιωμάτων και η γνωριμία με την αποδεικτική διαδικασία.

Ενδεικτικός προγραμματισμός

1 διδακτική ώρα μέχρι την § 2.5.

1 διδακτική ώρα για τις μετατοπίσεις στο επίπεδο και τη σύγκριση των ευθύγραμμων τμημάτων.

1 διδακτική ώρα για τις πράξεις ευθύγραμμων τμημάτων, μήκος ευθύγραμμου τμήματος, απόσταση σημείων και σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο.

1 διδακτική ώρα για ημιεπίπεδα, ορισμό γωνίας, σύγκριση γωνιών, διχοτόμο γωνίας, κάθετες ευθείες και είδη γωνιών.

1 διδακτική ώρα για εφαρμογές και κάθετο από σημείο σε ευθεία, μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος, σημεία συμμετρικά ως προς άξονα.

1 διδακτική ώρα για πράξεις γωνιών και απλές σχέσεις μεταξύ γωνιών, εφαρμογές.

2 διδακτικές ώρες για ορισμό του κύκλου και των στοιχείων του, επίκεντρες γωνίες και προτάσεις.

1 διδακτική ώρα για σύγκριση τόξων, μέσο τόξου, πράξεις τόξων και μέτρο τόξου και γωνίας.

1 διδακτική ώρα για ευθύγραμμα σχήματα.

Διδακτικοί στόχοι

- Να μπορούν οι μαθητές να σχεδιάζουν και να συμβολίζουν την ευθεία, το ευθύγραμμο τμήμα, την ημιευθεία, το επίπεδο και το ημιεπίπεδο.
- Να κατανοήσουν ότι η κίνηση είναι συνυφασμένη με τη Γεωμετρία, με το αξίωμα ότι κατά την μετακίνηση ένα σχήμα μένει αναλλοίωτο. Να γνωρίζουν ακόμη την έννοια της ισότητας.
  Η μετακίνηση - μετατόπιση είναι μια κατασκευή και τα όργανα αυτής είναι ο διαβήτης και ο χάρακας.
- Να γνωρίζουν τις πράξεις μεταξύ των ευθύγραμμων τμημάτων.
- Να κατανοήσουν την έννοια της γωνίας, τις πράξεις μεταξύ γωνιών και τις απλές σχέσεις αυτών.
- Να γνωρίζουν την έννοια της διχοτόμου, των κάθετων ευθειών και την ύπαρξη καθέτου από σημείο σε ευθεία.
- Να γνωρίζουν τα είδη των γραμμών και τα ευθύγραμμα σχήματα.
- Να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια του κύκλου ως γεωμετρικό τόπο
- Να γνωρίζουν την έννοια του τόξου, της χορδής, της επίκεντρης γωνίας και πότε δύο τόξα είναι συγκρίσιμα.
- Να γνωρίζουν τη μέτρηση τόξων και γωνιών.
- Να γνωρίζουν τις βασικές γεωμετρικές κατασκευές που υπάρχουν σε αυτό το κεφάλαιο.
- Τέλος, να επισημαίνεται, όπου υπάρχει, η απόδειξη για να μυηθούν οι μαθητές σε αυτή την έννοια καθώς και στα είδη των αποδείξεων.

Οδηγίες για τη διδασκαλία -Διδακτικές προσεγγίσεις

- Αρχικά θα πρέπει να διευκρινισθεί τι είναι πρωταρχικοί όροι και τι ορισμοί.
  Η προσέγγιση των γεωμετρικών εννοιών γίνεται από τον αισθητό χώρο όπως στο Γυμνάσιο, κατόπιν δίνεται ο ακριβής ορισμός τους.
- Για τις προτάσεις θα πρέπει στη αρχή να διευκρινίζεται ποιες είναι αξιώματα και ποιες προκύπτουν ως συνέπεια και αποδεικνύονται. Άλλωστε έτσι δομείται η Γεωμετρία και αυτό πρέπει οι μαθητές να το κατανοήσουν.
- Στην παράγραφο που ορίζεται το ημιεπίπεδο, χρειάζεται να τονισθεί η ιδιότητα - αξίωμα:

Η ευθεία που ενώνει δύο σημεία που βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την ευθεία που χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα.

- Για την έννοια της ανισότητας στα ευθύγραμμα τμήματα και στις γωνίες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έννοια του «περιέχεται». Στη συνέχεια με το αξίωμα της μετατόπισης μπορούμε να πούμε ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα ή γωνία μπορεί να μετατοπιστεί κατάλληλα πάνω σε ένα άλλο. Τότε ή συμπίπτουν ή το ένα είναι μέρος του άλλου και έχουμε ισότητα ή ανισότητα.
- Από το γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος επί φυσικό αριθμό, έχουμε μια πρόγευση της έννοιας της μέτρησης και της μονάδας, που θα ορισθεί αργότερα βέβαια, στο 7ο κεφάλαιο.
- Από τη μοναδικότητα του μέσου ευθύγραμμου σχήματος, θα πρέπει να γίνει κατασκευή (εύρεση) συμμετρικών σημείων του επιπέδου, όταν δίνεται το κέντρο.
- Με την πρόταση για τις εφεξής παραπληρωματικές θα πρέπει να τονισθεί τι σημαίνει αντίστροφο ενός θεωρήματος. Με παραδείγματα μπορεί να φανεί ότι το αντίστροφο δεν είναι πάντα αληθής πρόταση.
- Για τη μοναδικότητα της καθέτου από σημείο μίας ευθείας στην ευθεία να τονισθεί η διαδικασία της απόδειξης.

Τέλος πρέπει να γίνεται χρήση των γεωμετρικών οργάνων.

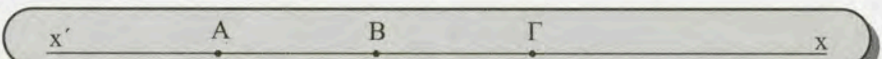
Αξιολόγηση και ενδεικτικά κριτήρια

Η κατανόηση των πρώτων γεωμετρικών εννοιών είναι ο στόχος της αξιολόγησης. Ο έλεγχος γίνεται κυρίως με ερωτήσεις σύντομης απάντησης, που μπορεί να είναι και αντικειμενικού τύπου.

Παραδείγματα

1) Ερωτήσεις Σύντομης Απάντησης

Μετά τον ορισμό του ευθύγραμμου τμήματος και της ημιευθείας μπορεί να δοθούν π.χ σε ευθεία xx΄ τρία σημεία Α, Β, Γ και να ζητηθεί να βρεθούν:



i) τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται.

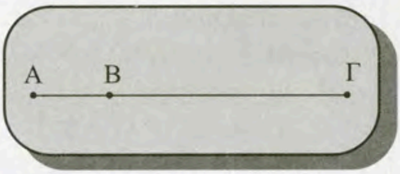
ii) ο αριθμός των ημιευθειών που ορίζονται.
iii) δύο ημιευθείες που έχουν κοινό μέρος ευθύγραμμο τμήμα.
iv) δύο ημιευθείες που δεν έχουν κοινά σημεία.
v) δύο ημιευθείες που η μία περιέχεται στην άλλη.

2) Ασκήσεις απαρίθμησης

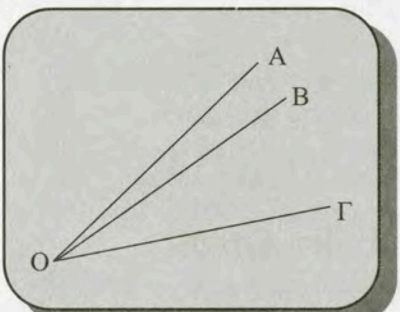
i) Από 4 σημεία πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται;
ii) Με 3 σημεία στο επίπεδο πόσες ευθείες ορίζονται;
iii) Υπάρχουν στο επίπεδο 5 ευθείες, ώστε καθεμία να τέμνει όλες τις άλλες, ενώ δεν υπάρχει σημείο που να διέρχονται 3 από τις δοσμένες ευθείες. Να βρεθεί το πλήθος των σημείων τομής των ευθειών.
iv) Ασκήσεις που αναφέρονται στο πλήθος των διαγωνίων πολυγώνου.

3) Για τις πράξεις ευθύγραμμων τμημάτων και γωνιών

Για έλεγχο της κατανόησης αυτών μπορεί να δοθούν δύο διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ή γωνίες και να ζητηθεί η συμπλήρωση των κενών στις παρακάτω σχέσεις:



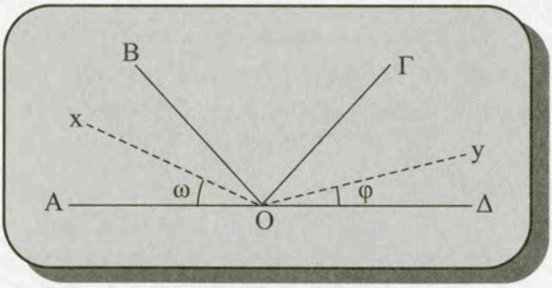
ΑΒ = ΑΓ – ΒΓ
ΑΓ = ...
ΒΓ = ...



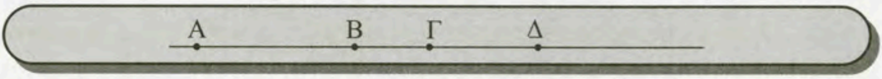
$A\hat{O}B = A\hat{O}\Gamma - B\hat{O}\Gamma$
$A\hat{O}\Gamma = ...$
$B\hat{O}\Gamma = ...$

4) Υπολογιστικές

i) Στο παρακάτω σχήμα, όπου Οx και Οy διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$, και $\Gamma\hat{O}\Delta$ και $\omega = 25°$, $\varphi = 14°$, να βρεθεί το μέτρο της γωνίας $B\hat{O}\Gamma$.



ii) Αν στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΓ= 9, ΒΔ=13 και ΑΔ=20, να υπολογίσετε το ΒΓ.



iii) Δίνονται δύο σημεία Α και Β και ένα ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ. Να βρείτε στην ευθεία ΑΒ σημείο Γ, ώστε να είναι ΓΑ+ΓΒ=ΚΛ.

5) Αποδεικτικές

i) Επιλογή από τις αποδεικτικές του βιβλίου.

ii) Αν στην κορυφή γωνίας φέρουμε τις κάθετες στις δύο πλευρές, να αποδείξετε ότι η γωνία που σχηματίζεται από τις δύο κάθετες και η δοσμένη είναι παραπληρωματικές.

iii) Αν δύο κύκλοι είναι ομόκεντροι και μια ευθεία διέρχεται από το κέντρο τους, τότε τα τμήματα αυτής που είναι μεταξύ των δύο κύκλων είναι ίσα.

Σχέδιο κριτηρίου αξιολόγησης

Θέμα 1ο. Δύο ερωτήσεις ορισμών.

Θέμα 2ο. Διατύπωση του αντιστρόφου ενός θεωρήματος.

Θέμα 3ο. Μια κατασκευή ή υπολογιστική άσκηση.

Θέμα 4ο. Αποδεικτική άσκηση.

Απαντήσεις των ερωτήσεων κατανόησης

§ 2.1-2.10

1. Ένα ή κανένα κοινό σημείο.

2. i) Ax,Ay ii) Bx,By

3. AB<ΑΓ και ΑΓ<ΑΔ, οπότε AB<ΑΓ<ΑΔ

4. Όχι.

5. Μία ή τρεις.

§ 2.11-2.16

1. i) B ii) A iii) B

2. **Οξείες:** $x\hat{O}y$, $y\hat{O}z$, $z\hat{O}t$. **Ορθές:** $x\hat{O}z$, $y\hat{O}t$. **Αμβλείες:** $x\hat{O}t$.

3. $A\hat{\Delta}B$ και $A\hat{\Delta}\Gamma$, $B\hat{A}\Gamma$ και $x\hat{A}\Gamma$, $B\hat{A}\Delta$ και $x\hat{A}\Delta$.

4. i) Όχι. ii) Όχι.

5. Όχι.

§ 2.18

7. Όχι, γιατί οι γωνίες $\hat{K}_1$ και $\hat{K}_2$ δεν είναι επίκεντρες.

§ 2.19

1. i) $\overset{\frown}{AB\Gamma}$, ii) $\overset{\frown}{AB\Delta}$, iii) $\overset{\frown}{B\Gamma}$, iv) $\overset{\frown}{AB}$.

2. i) $\overset{\frown}{AB\Gamma}$, ii) $\overset{\frown}{AB\Delta}$, iii) $\overset{\frown}{AB}$ iv) $\overset{\frown}{0}$.

3. δ

5. Λ, γιατί η γωνία $A\hat{K}B$ δεν είναι επίκεντρη.

Λύσεις των Δραστηριοτήτων - Εργασιών

Δραστηριότητα § 2.8

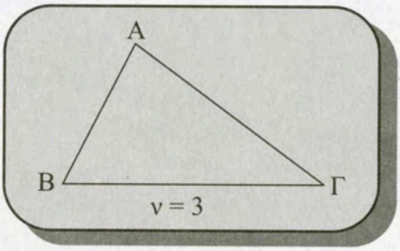
Απλή.

Δραστηριότητα Τέλος Κεφαλαίου.

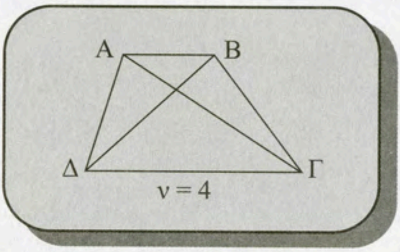
Απλή.

Εργασία Τέλος Κεφαλαίου.

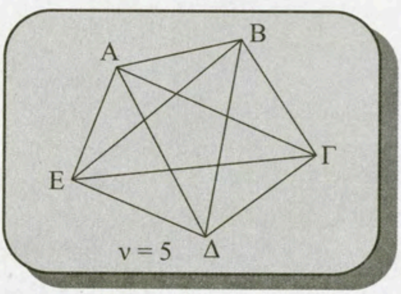
i)Από την κορυφή Α **Συνολικά**



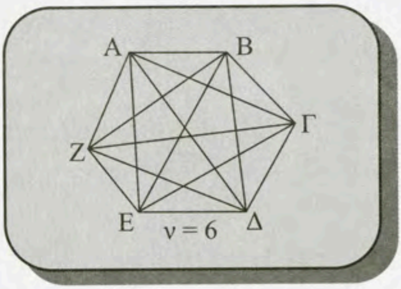
0 διαγώνιοι 0 διαγώνιοι



1 διαγώνιος 2 διαγώνιοι



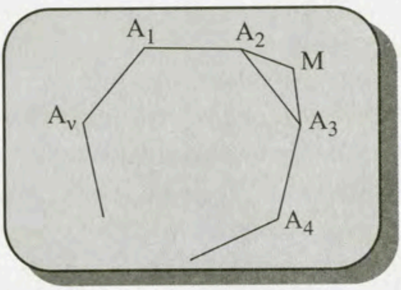
2 διαγώνιοι 5 διαγώνιοι



3 διαγώνιοι 9 διαγώνιοι

ii) Από μια κορυφή φέρουμε $\delta = \nu - 3$ διαγωνίους (εκτός της κορυφής και των δύο διαδοχικών).

Συνολικά έχουμε $\delta_\nu = \dfrac{\nu(\nu-3)}{2}$ διαγωνίους, αφού όλες οι διαγώνιοι μετρήθηκαν 2 φορές.



iii) Έστω ότι το ν-γωνο $A_1A_2...A_\nu$ έχει

$\delta_\nu = \dfrac{\nu(\nu-3)}{2}$ διαγωνίους.

Προσθέτουμε την κορυφή M.

Το $A_1A_2MA_3A_4...A_\nu$ έχει ν+1 πλευρές.

Θα αποδείξουμε ότι έχει

$\delta_{\nu+1} = \dfrac{(\nu+1)[(\nu+1)-3]}{2} = \dfrac{(\nu+1)(\nu-2)}{2}$ διαγωνίους.

Οι επιπλέον διαγώνιοι που ξεκινούν από το M είναι $(\nu+1)-3=\nu-2$ το πλήθος. Προσθέτουμε και την A_2A_3 που τώρα είναι διαγώνιος, οπότε έχουμε $\nu-2+1=\nu-1$ επιπλέον διαγωνίους.

Άρα, συνολικά το $A_1A_2MA_3....A_\nu$ έχει $\delta_{\nu+1} = \delta_\nu+(\nu-1)$ διαγωνίους δηλαδή

$$\delta_{\nu+1} = \frac{\nu(\nu-3)}{2} + (\nu-1) = \frac{\nu^2-3\nu+2\nu-2}{2} = \frac{\nu^2-\nu-2}{2} \quad \text{ή}$$

$$\delta_{\nu+1} = \frac{(\nu+1)(\nu-2)}{2}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα

Ενδεικτικός αριθμός ωρών διδασκαλίας: 16

Τρίγωνα

Το τρίγωνο είναι το πιο απλό από τα πολύγωνα που αναφέρονται στο προηγούμενο κεφάλαιο, αλλά και το πιο βασικό γεωμετρικό σχήμα και ενδιαφέρον λόγω των γεωμετρικών ιδιοτήτων που έχει. Είναι το βασικό σχήμα, αφού κάθε πολύγωνο μπορεί να διαμερισθεί σε τρίγωνα και, έτσι, θέματα που αναφέρονται στο πολύγωνο να ανάγονται σε προβλήματα τριγώνου. Ωστόσο δεν πρέπει να διατεθεί υπερβολικός χρόνος για τη μελέτη του. Τόσο η σύγκριση τριγώνων, όσο και οι ιδιότητές τους, χρησιμοποιούνται συχνά στα επόμενα κεφάλαια και η εμπέδωση της γνώσης θα γίνεται σταδιακά. Βέβαια δεν εξαντλείται στο κεφάλαιο αυτό η μελέτη του τριγώνου (εμβαδόν, μετρικές σχέσεις κτλ.).

Ενδεικτικός προγραμματισμός

3 διδακτικές ώρες για τα στοιχεία και είδη τριγώνων, 1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων, εφαρμογές σε ισοσκελές τρίγωνο και σε κύκλο.
2 διδακτικές ώρες για τα άλλα 2 κριτήρια και εφαρμογές στο ισοσκελές και σε κύκλο.
1 διδακτική ώρα για ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου και κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων.
2 διδακτικές ώρες για εφαρμογές (διχοτόμος, χορδές και αποστήματα κτλ.).
1 διδακτική ώρα για βασικούς γεωμετρικούς τόπους, κεντρική και αξονική συμμετρία.
2 διδακτικές ώρες για ανισοτικές σχέσεις.
1 διδακτική ώρα για κάθετες και πλάγιες.
2 διδακτικές ώρες για σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου και δύο κύκλων.

2 διδακτικές ώρες για τις γεωμετρικές κατασκευές που αναφέρονται στο κεφάλαιο.

Διδακτικοί στόχοι

- Να γνωρίζουν οι μαθητές το τρίγωνο, τα κύρια και δευτερεύοντα στοιχεία του.
- Να γνωρίζουν τα είδη των τριγώνων και τις βασικές ιδιότητές τους.
- Να γνωρίζουν τι σημαίνει κριτήριο ισότητας τριγώνων και να χρησιμοποιούν τα γνωστά κριτήρια για σύγκριση τριγώνων, γωνιών ή ευθύγραμμων τμημάτων που ανήκουν σε ένα γεωμετρικό σχήμα.
- Να γνωρίζουν τις ανισοτικές σχέσεις που ισχύουν στο τρίγωνο και να μπορούν να τις χρησιμοποιούν.
- Με τη διχοτόμο και τη μεσοκάθετο να εμπεδώσουν την έννοια του γεωμετρικού τόπου.
- Από την σχέση κάθετης και πλάγιας από σημείο σε ευθεία να μπορούν να ερμηνεύουν τις δυνατές θέσεις ευθείας και κύκλου.

Οδηγίες για τη διδασκαλία - Διδακτικές προσεγγίσεις

- Να τονισθεί ότι η διάμεσος, η διχοτόμος και το ύψος είναι ευθύγραμμα τμήματα.
- Να τονισθεί τι σημαίνει κριτήριο, ότι δηλαδή αποκτά αποδεικτική ισχύ.
- Να τονισθεί πώς σε ένα ζεύγος ίσων τριγώνων βρίσκονται τα αντίστοιχα (ομόλογα) στοιχεία που είναι ίσα.
- Θα πρέπει με αντιπαράδειγμα να αποδειχθεί ότι τρίγωνα με δύο ίσες πλευρές αντίστοιχα και μία γωνία, όχι την περιεχόμενη, δεν είναι πάντα ίσα.
- Με κατάλληλες ασκήσεις να αποδειχθεί ότι η απόδειξη ισότητας μεταξύ δύο γωνιών ή ευθύγραμμων τμημάτων σε ένα σχήμα ανάγεται συχνά σε αναζήτηση ίσων τριγώνων όπου αυτά είναι αντίστοιχα στοιχεία.
- Οι ιδιότητες στο ισοσκελές και ισόπλευρο, στις κάθετες και πλάγιες προσφέρονται για την εμπέδωση της απόδειξης.
- Όταν δοθεί η έννοια του γεωμετρικού τόπου μπορεί να ακολουθήσουν ανάλογες δραστηριότητες.
- Αξίζει να παρουσιασθούν κάποιες από τις βασικές γεωμετρικές κατασκευές που περιέχονται στο κεφάλαιο.

Αξιολόγηση και ενδεικτικά κριτήρια

Για την κατανόηση και χρήση των κριτηρίων ισότητας τριγώνων αρχικά πρέπει να δίνονται ασκήσεις, όπου οι μαθητές να μπορούν να διακρίνουν τις προϋποθέσεις των κριτηρίων και να οδηγούνται σε ίσα τρίγωνα και στις συνέπειες της ισότητας.

Η διάκριση των προϋποθέσεων αυτών μπορεί να γίνεται είτε μέσα από το κείμενο είτε μέσα από σχήματα.

Φυσικά οι εφαρμογές της ισότητας τριγώνων στα ισοσκελή τρίγωνα, στον κύκλο και στις κάθετες και πλάγιες, εκτός του ότι αποτελούν νέα γνώση, αποτελούν και κριτήρια για τον έλεγχο της μάθησης.

Ένα άλλο πεδίο αποτελεί η ισότητα ομόλογων δευτερευόντων στοιχείων τριγώνου (υψών, διαμέσων, διχοτόμων) όταν τα τρίγωνα είναι ίσα.

Ακόμη ασκήσεις όπου από την ισότητα τριών στοιχείων (π.χ διαμέσου, πλευράς, γωνίας) συνεπάγεται η ισότητα των τριγώνων.

Η ιδιότητα της μεσοκαθέτου και της διχοτόμου ελέγχεται με προβλήματα κατασκευών.

Οι ανισοτικές σχέσεις είτε μεταξύ γωνιών είτε μεταξύ τμημάτων σε ένα σχήμα είναι από τους στόχους αυτού του κεφαλαίου.

Στο βιβλίο υπάρχουν ασκήσεις σε όλες τις ομάδες, που στηρίζονται:

- στην ανισοτική σχέση στο τρίγωνο,
- στη σχέση πλαγίας και καθέτου,
- στη σχέση δύο πλαγίων,
- στη σχέση γωνιών,

σε συνδυασμό πάντα και με τη μεταβατική ιδιότητα.

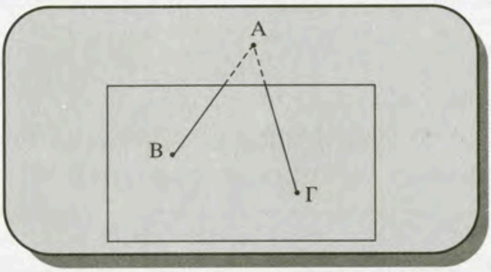
1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. Σε τρίγωνο προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα καθεμία από δύο πλευρές του προς το μέρος της κορυφής που συναντώνται. Τα άκρα των προεκτάσεων με την κορυφή ορίζουν άλλο τρίγωνο.
i) Δικαιολογήστε γιατί είναι ίσα.
ii) Να βρείτε τα ζεύγη των ίσων γωνιών.

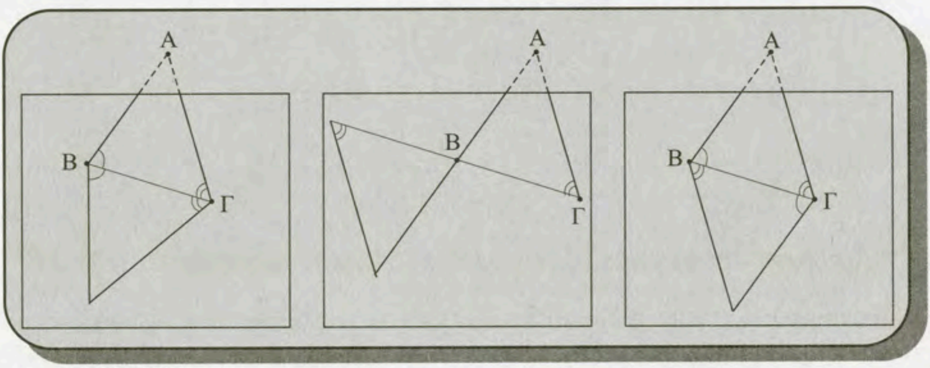
2. Προεκτείνουμε κυκλικά τις 3 πλευρές ισόπλευρου τριγώνου κατά ίσα τμήματα. Σχηματίζονται 3 ίσα τρίγωνα.
i) Δικαιολογήστε γιατί είναι ίσα.
ii) Τι τρίγωνο σχηματίζουν τα άκρα των προεκτάσεων;

3. Σε κύκλο φέρουμε 3 διαμέτρους. Ενώνουμε τρία άκρα τους και έχουμε ένα τρίγωνο. Δικαιολογήστε γιατί αυτό είναι ίσο με το τρίγωνο των άλλων άκρων.

4. Δόθηκε σε μαθητές το παρακάτω σχήμα και ζητήθηκε να βρεθούν οι αποστάσεις των σημείων Β και Γ από το απρόσιτο σημείο Α που βρίσκεται έξω από το χαρτί σχεδίασης.



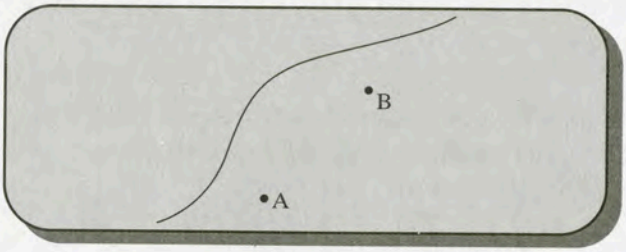
Δόθηκαν τρεις σωστές διαφορετικές απαντήσεις σχεδιάζοντας στο χαρτί σχεδίασης τα παρακάτω σχήματα. (σημειώνονται τα σχήματα, οι ίσες γωνίες και οι ίσες πλευρές). Έτσι τα ΑΒ και ΑΓ βρίσκονται τώρα στο χαρτί σχεδίασης. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις.



2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

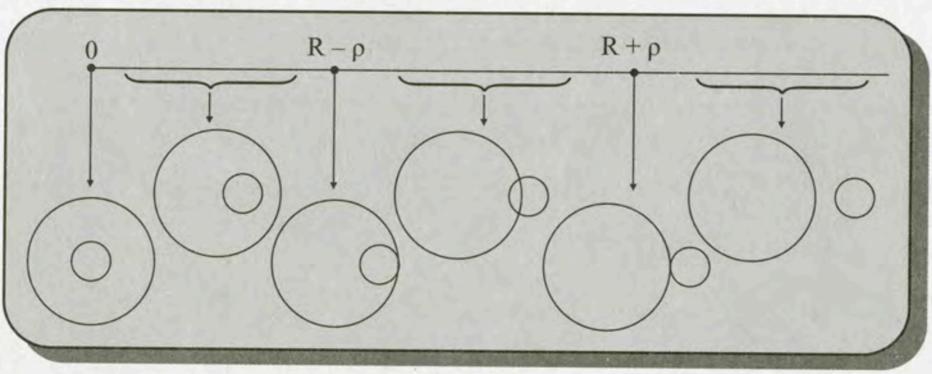
1. Δίνονται τρία σημεία Α, Β, Γ μη συνευθειακά. Να βρείτε σημείο Σ του επιπέδου, ώστε τα τρίγωνα ΣΑΒ και ΣΒΓ να είναι ισοσκελή.

2. Στο παρακάτω σχέδιο υπάρχει ένας δρόμος και δύο κατοικίες Α και Β. Σε ποιο σημείο του δρόμου πρέπει να τοποθετηθεί στάση λεωφορείου, ώστε να μην αδικείται κανένας από τους κατοίκους;



3. i) Έχουμε δύο κύκλους που έχουν ακτίνες R και ρ. Σχηματίζουμε το άθροισμα, R+ρ και τη διαφορά R-ρ. Φυσικά είναι θετικοί αριθμοί και στον άξονα των θετικών θα έχουν την παρακάτω διάταξη.

Να συμπληρωθεί το σχήμα με τη θέση των κύκλων για κάθε τιμή της διακέντρου δ.. Η απάντηση είναι στο παρακάτω σχήμα.



ii) Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και Α εσωτερικό σημείο του. Αν Μ τυχαίο σημείο του κύκλου, η μεσοκάθετος στην ΑΜ τέμνει την ακτίνα ΟΜ στο Σ. Να αποδειχθεί ότι ΣΟ+ΣΑ=ρ, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου.

Διδασκαλία με φύλλο εργασίας

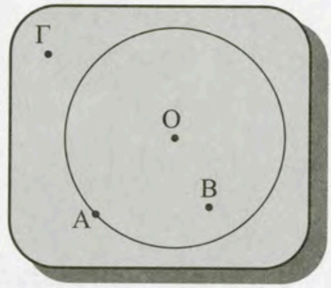
Δίνεται στους μαθητές η πορεία της διδασκαλίας με μορφή ερωτήσεων. Για την κάθε ερώτηση δίνεται εύλογος χρόνος για επεξεργασία από τον κάθε μαθητή. Κατόπιν ένας μαθητής επιχειρεί να απαντήσει δίνοντας τις απαραίτητες διευκρινίσεις στον πίνακα.

Φύλλο εργασίας στην ενότητα: θέση ευθείας και κύκλου

1. **Κύκλος** κέντρου Ο και ακτίνας ρ είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων ....
....

2. Μπορείτε να χαρακτηρίσετε τη θέση των σημείων Α, Β, Γ ως προς τον κύκλο (Ο, ρ) στο παρακάτω σχήμα;

Το Α είναι ....
Το Β είναι ....
Το Γ είναι ....



3. Στην αυλή ενός σπιτιού υπάρχει ένα δέντρο στο οποίο είναι δεμένος ένας σκύλος με σχοινί μήκους 4 μέτρων.

i) Περιγράψτε τις δυνατές κινήσεις του σκύλου.

ii) Πότε μπορούμε να πάμε στο σπίτι χωρίς να μας δαγκώσει;

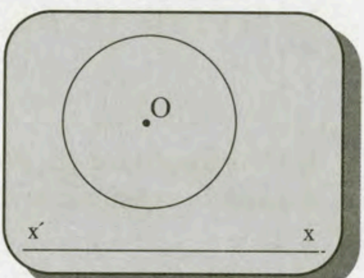
4. Δίνεται κύκλος (Ο, ρ), μια ευθεία x΄x και α η απόσταση του κέντρου Ο από την ευθεία x΄x.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i) $\alpha > \rho$

Η ευθεία x΄x δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται

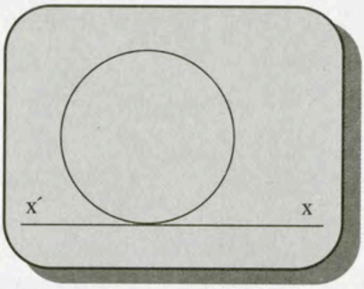
....



ii) $\alpha = \rho$

Η ευθεία x΄x έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται

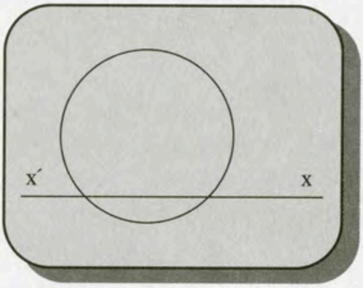
....



iii) $\alpha < \rho$

Η ευθεία x΄x έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο και λέγεται

....



Εργασία για το σπίτι: Τρεις ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο. Π.χ. άσκηση εμπέδωσης 2 (σελ.63) και αποδεικτικές ασκήσεις 1 και 2 (σελ.63).

Απαντήσεις των ερωτήσεων κατανόησης

§ 3.1 – 3.4

1. i) Λ ii) Λ

3. i) ύψος και διάμεσος, ii) ύψος και διχοτόμος, iii) ισαπέχει από τα άκρα του, iv) οι αντίστοιχες χορδές τους είναι ίσες.

§ 3.5 – 3.6

1. i) Σ ii) Λ iii) Σ.

2. Σ

4. (1ο, 4ο), (2ο, 6ο), (4ο, 8ο), (5ο, 7ο).

5. Της χορδής και διχοτομεί τα αντίστοιχα τόξα της.

6. γ

§ 3.7

1. Η μεσοκάθετος της βάσης.

2. Είναι οι ευθείες των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν.

§ 3.12

1. i) Σ ii) Λ iii) Λ iv) Λ v) Σ

2. γ

§ 3.13

1. i) ΚΒ = ΚΓ ii) ΚΒ > ΚΓ

2. i) Σ ii) Λ iii) Λ

§ 3.15

2. Δεν είναι δυνατό, γιατί αν ήταν, ο κύκλος (Ο, ΟΑ) θα είχε τρία κοινά σημεία με την ευθεία ε.

3. α. Σ β. Σ γ. Σ δ. Σ

§ 3.16

1. (α. 4) (β. 3) (γ. 8) (δ. 2) (ε. 1)

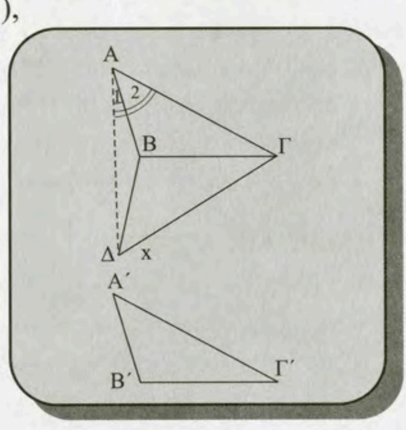
2. i) Σ ii) Σ iii) Σ

Λύσεις των Δραστηριοτήτων - Εργασιών

1η Δραστηριότητα § 3.4

- Έστω ότι $\hat{B} > 90°$ και $\hat{B}' > 90°$.

Η απόδειξη είναι η ίδια με αυτή του βιβλίου, με τη μόνη διαφορά ότι, αντί να προσθέσουμε τις σχέσεις (4), (4΄), τις αφαιρούμε ώστε να προκύψει πάλι $\hat{A} = \hat{A}'$.



- Έστω ότι $\hat{B} = 90° = \hat{B}'$.

Τότε η ισότητα των τριγώνων είναι άμεση συνέπεια του κριτηρίου ΠΓΠ.

2η Δραστηριότητα § 3.4

Είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων δύο πλευρών του τριγώνου.

Δραστηριότητα § 3.6

Είναι το σημείο τομής των διχοτόμων δύο γωνιών του τριγώνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Παράλληλες ευθείες

Ενδεικτικός αριθμός ωρών διδασκαλίας: 7

Στο 4ο Κεφάλαιο μελετάμε την έννοια της παραλληλίας. Τα βασικά σημεία του κεφαλαίου είναι:

- *Οι γωνίες δύο παράλληλων ευθειών που τέμνονται από τρίτη ευθεία.*
- *Το αίτημα παραλληλίας.*
- *Οι ιδιότητες των παραλλήλων ευθειών.*
- *Οι αξιοσημείωτοι κύκλοι ενός τριγώνου (περιγεγραμμένος – εγγεγραμμένος – παρεγγεγραμμένος).*
- *Οι προτάσεις που αναφέρονται στο άθροισμα γωνιών και κυρτού ν-γώνου.*

Έτσι ολοκληρώνουμε την αρχική μελέτη του τριγώνου για να περάσουμε στα επόμενα κεφάλαια στη μελέτη των τετραπλεύρων.

Ενδεικτικός προγραμματισμός

1 διδακτική ώρα για τέμνουσα δύο ευθειών και Ευκλείδειο αίτημα.
1 διδακτική ώρα για ιδιότητες παράλληλων ευθειών.
1 διδακτική ώρα για κατασκευή παράλληλης ευθείας και γωνίες με πλευρές παράλληλες.
1 διδακτική ώρα για αξιοσημείωτους κύκλους του τριγώνου.
1 διδακτική ώρα για το άθροισμα γωνιών τριγώνου, γωνίες με πλευρές κάθετες και άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου.
2 διδακτικές ώρες για εφαρμογές των παραλλήλων.

Διδακτικοί στόχοι

- Να γνωρίζουν οι μαθητές τις παράλληλες ευθείες, τις ιδιότητές τους και πότε δύο ευθείες του επιπέδου είναι παράλληλες.
- Να μπορούν να κατασκευάζουν παράλληλες ευθείες.
- Να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των παραλλήλων για να ανακαλύπτουν σχέσεις σε γεωμετρικά σχήματα.
- Να μπορούν να κατασκευάζουν τον περιγεγραμμένο και εγγεγραμμένο κύκλο σε τρίγωνο.
- Να μπορούν να υπολογίζουν το άθροισμα γωνιών κυρτών ν-γώνων.

Οδηγίες για τη διδασκαλία - Διδακτικές προσεγγίσεις

Αφού δοθεί ο ορισμός των παραλλήλων θα αποδειχθεί η ύπαρξή τους από την ισότητα των εντός ενναλάξ γωνιών. Το πόρισμα που προκύπτει από την πρόταση αυτή, ότι δύο ευθείες κάθετες σε ευθεία του επιπέδου είναι παράλληλες, μπορεί να αποδειχθεί και με την πρόταση προηγούμενου κεφαλαίου, ότι από σημείο εκτός ευθείας άγεται μόνο μία κάθετος, και με απαγωγή σε άτοπο. Η πρόταση της ισότητας των εντός εναλλάξ γωνιών, που αποδεικνύει την ύπαρξη παραλλήλων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την κατασκευή παραλλήλων από σημείο σε ευθεία.

Οι ιδιότητες που αναφέρονται στις σχέσεις γωνιών που ορίζονται από τέμνουσα δύο παραλλήλων, αν διατυπωθούν αντίστροφα είναι κριτήρια παραλληλίας δύο ευθειών του επιπέδου.

Μετά το αίτημα παραλληλίας θα γίνει αναφορά στις συνέπειες από τη μη παραδοχή του (μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες). Για τους αξιοσημείωτους κύκλους του τριγώνου, διδακτικά μπορεί να ακολουθηθεί η εξής πορεία:

Για τον περιγεγραμμένο κύκλο: Αν πάρουμε τρία σημεία σε ένα κύκλο και τα ενώσουμε, σχηματίζεται ένα τρίγωνο που λέγεται εγγεγραμμένο και ο κύκλος περιγεγραμμένος. Παρατηρούμε φυσικά ότι το κέντρο του κύκλου ισαπέχει από τις τρεις κορυφές. Αντίστροφα: Αν έχουμε το τρίγωνο, με βάση την παραπάνω ιδιότητα πώς μπορούμε να βρούμε περιγεγραμμένο σ' αυτό κύκλο; Πόσοι τέτοιοι κύκλοι υπάρχουν;

Για τον εγγεγραμμένο κύκλο: Αν σε τρία σημεία του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενες (δύο μη διαμετρικές) που τέμνονται, ορίζουν ένα τρίγωνο περιγεγραμμένο και ο κύκλος είναι εγγεγραμμένος. Το κέντρο ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου. Αν δοθεί τρίγωνο, πώς θα βρούμε εγγεγραμμένο σε αυτό κύκλο; Ποια είναι η αντίστοιχη κατασκευή;

Οι εφαρμογές που αναφέρονται στο άθροισμα των γωνιών ή σε σχήματα που έχουν γωνίες με πλευρές παράλληλες βοηθούν στην εμπέδωση της θεωρίας των παραλλήλων και οι μαθητές κατανοούν την παραλληλία ως εργαλείο μελέτης και τις ιδιότητες των σχημάτων.

Αξιολόγηση και ενδεικτικά κριτήρια

Η αξιολόγηση πρέπει αρχικά να αναφέρεται στον έλεγχο κατανόησης των ιδιοτήτων των παραλλήλων.

Οι ερωτήσεις κατανόησης που αναφέρονται στο τέλος του κεφαλαίου και παρόμοιες αυτών που είναι υπολογιστικές είναι κατάλληλες για τον έλεγχο αυτό.

Ο έλεγχος γίνεται και με αποδεικτικές ασκήσεις όπως και με ασκήσεις εμπέδωσης.

Ο έλεγχος, τέλος, των ιδιοτήτων – κριτηρίων γίνεται και με κατασκευή παραλλήλων που στηρίζεται σε αυτές.

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογισθούν οι γωνίες ω και φ.

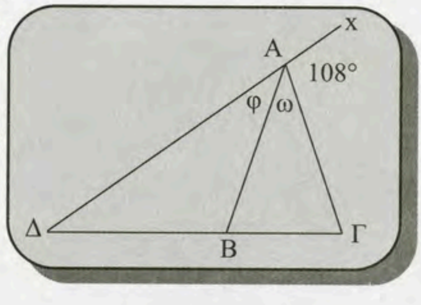
2. Η άσκηση 3 της ομάδας «ασκήσεις εμπέδωσης» (σελ. 82).

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος ΑΔ. Από την κορυφή Β φέρουμε ΒΕ//ΑΔ που τέμνει την προέκταση ΓΑ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΕΓ = ΑΒ + ΑΓ.

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = φ$ και $\hat{B} = 2φ$. Η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\hat{Γ}_{εξ}$ σχηματίζει με την ΑΓ γωνία 63°. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.

2. Στο σχήμα που δίνεται είναι ΑΒ=ΑΓ=ΔΒ και η γωνία $x\hat{A}Γ = 108°$. Να υπολογιστούν οι γωνίες φ και ω.



3. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ κυρτού τετραπλεύρου τέμνονται στο Ε. Να αποδείξετε ότι $A\hat{E}B = \dfrac{\hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2}$.

Απαντήσεις των ερωτήσεων κατανόησης

§ 4.1-4.4

1. i) Εκτός και εναλλάξ. Είναι $\alpha = \beta$.
ii) Είναι παραπληρωματικές.

2. $\Delta\hat{\Gamma}A = 360° - 245° = 115°$, οπότε $\Delta\hat{\Gamma}A + \hat{A} = 115° + 65° = 180°$.

3. $\omega + \varphi = 180°$.

4. §4.2. Θεώρημα - Πορίσματα Ι και ΙΙ και Πρόταση ΙΙ.

5. Ίσες.

§ 4.5. - 4.8

1. $\omega = 110°$.

2. $\hat{\Gamma} = 70°$, οπότε $\varphi = 180° - 70° - 70° = 40°$.

3. Το τετράπλευρο.

4. Γιατί και οι άλλες δύο γωνίες είναι 60°.

5. 360°.

Λύσεις των Δραστηριοτήτων - Εργασιών

Δραστηριότητες Τέλος Κεφαλαίου

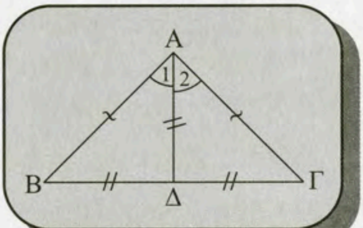
1. Απλή.

2. Απλή.

Εργασία Τέλος Κεφαλαίου

α) Με ευθεία ΑΔ από την κορυφή Α.

i) $\left.\begin{array}{l}\Delta A = \Delta B \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{A}_1 \\ \Delta A = \Delta\Gamma \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = \hat{A}_2\end{array}\right\}$ οπότε $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}$.



$\Delta A = \Delta B$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$

Άρα, $\hat{A} = 90°$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45°$.

ii) $BA = B\Delta \Leftrightarrow \hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$

$\Delta A = \Delta\Gamma \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = \hat{A}_2$

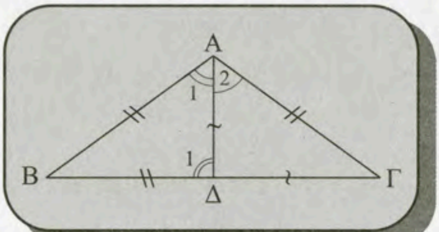
$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma} + \hat{A}_2 = 2\hat{\Gamma} = 2\hat{B}$.

Άρα $\hat{B} + \hat{A}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180° \Leftrightarrow$

$5\hat{B} = 180° \Leftrightarrow \hat{B} = 36°$.

Επομένως $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 36°$ και

$\hat{A} = 108°$.



ΒΑ = ΒΔ και ΔΑ = ΔΓ

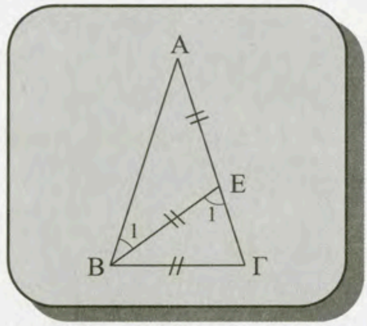
β) Με ευθεία ΒΕ από την κορυφή Β

i) $EB = EA \Leftrightarrow \hat{B}_1 = \hat{A}$

$BE = B\Gamma \Leftrightarrow \hat{E}_1 = \hat{\Gamma}$

$\hat{E}_1 = \hat{B}_1 + \hat{A} = 2\hat{A} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 2\hat{A}$.

Άρα, $\hat{\Gamma} = \hat{B} = 72°$ και $\hat{A} = 36°$.



ΕΒ = ΕΑ και ΒΕ = ΒΓ

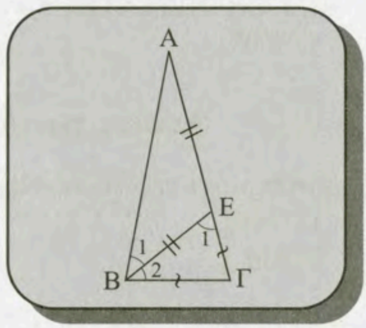
ii) Όμοια $\hat{E}_1 = 2\hat{A}$. Άρα $\hat{B}_2 = 2\hat{A}$,

οπότε $\hat{B} = 3\hat{A}$.

Επομένως, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$

$\Leftrightarrow 7\hat{A} = 180° \Leftrightarrow \hat{A} = \dfrac{180°}{7}$

$\Leftrightarrow \hat{A} = 25\dfrac{5°}{7}, \hat{B} = \hat{\Gamma} = 77\dfrac{1°}{7}$.



ΕΒ = ΕΑ και ΓΕ = ΓΒ

Επομένως, συνοψίζοντας παρατηρούμε ότι ισοσκελή τρίγωνα που είναι δυνατόν να χωρισθούν σε δύο άλλα ισοσκελή είναι:

1) Κάθε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

2) Κάθε ισοσκελές τρίγωνο με γωνίες 108°, 36°, 36°.

3) Κάθε ισοσκελές τρίγωνο με γωνίες 36°, 72°, 72°.

4) Κάθε ισοσκελές τρίγωνο με γωνίες $25\dfrac{5°}{7}, 77\dfrac{1°}{7}, 77\dfrac{1°}{7}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Παραλληλόγραμμα τραπέζια

Ενδεικτικός αριθμός ωρών διδασκαλίας: 11

Στο κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιούμε την ισότητα τριγώνων και τις ιδιότητες των παράλληλων ευθειών για να μελετήσουμε τα παραλληλόγραμμα και το τραπέζιο.

Αρχικά μελετάμε τις ιδιότητες και τα είδη των παραλληλογράμμων. Στη συνέχεια εξετάζουμε τις εφαρμογές των παραλληλογράμμων στα τρίγωνα, τετράπλευρα κτλ. δίνοντας έμφαση στο βαρύκεντρο και το ορθόκεντρο του τριγώνου.

Το κεφάλαιο κλείνει με τη μελέτη του τραπεζίου.

Στο τέλος αναφέρονται συνολικά τα αξιοσημείωτα σημεία και οι συντρέχουσες ευθείες (μεσοκάθετοι – διχοτόμοι – διάμεσοι – ύψη) σε ένα τρίγωνο.

Ενδεικτικός προγραμματισμός

1 διδακτική ώρα μέχρι τα κριτήρια για παραλληλόγραμμα.
1 διδακτική ώρα για τα κριτήρια.
3 διδακτικές ώρες για τα είδη παραλληλογράμμων.
2 διδακτικές ώρες για την § 5.6.
1 διδακτική ώρα για βαρύκεντρο και ορθόκεντρο τριγώνων.
1 διδακτική ώρα για την § 5.9 (ιδιότητες του ορθογώνιου τριγώνου).
2 διδακτικές ώρες για τα τραπέζια και το ισοσκελές τραπέζιο.

Διδακτικοί στόχοι

- Να γνωρίζουν οι μαθητές τα παραλληλόγραμμα με τις ιδιότητές τους και τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο.
- Να γνωρίζουν τις χαρακτηριστικές ιδιότητες του τετραγώνου, ορθογωνίου και ρόμβου.
- Να γνωρίζουν την ιδιότητα του τμήματος που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου.
- Να γνωρίζουν το βαρύκεντρο και ορθόκεντρο των τριγώνων.

• Να γνωρίζουν την ιδιότητα διαμέσου τραπεζίου και τις ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου.
• Τέλος, να εξασκηθούν στην αποδεικτική διαδικασία για την οποία το κεφάλαιο αυτό προσφέρεται με τις εφαρμογές που υπάρχουν.

Οδηγίες για τη διδασκαλία - Διδακτικές προσεγγίσεις

Το παραλληλόγραμμο ορίζεται ως το τετράπλευρο με τις απέναντι πλευρές παράλληλες ή κατασκευαστικά με την τομή δύο παραλλήλων από δύο άλλες παράλληλες.

Στη συνέχεια μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να αποδείξουν τις ιδιότητες ως ασκήσεις. Προκύπτουν από σύγκριση τριγώνων ή από συνδυασμό ιδιοτήτων παραλλήλων.

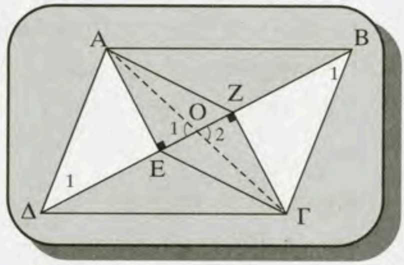
Για κάθε πρόταση μπορεί να διατυπώνεται και η αντίστροφη (όπου υπάρχει) από τους μαθητές και να αποδεικνύεται. Έτσι η διδασκαλία πάντα γίνεται ενεργητική. Αυτές οι προτάσεις αποτελούν και κριτήρια για το πότε ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

♦ Για την κατανόηση της χρήσης των κριτηρίων στο να αποδειχθεί ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο δίνεται το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από τα Α και Γ φέρουμε τα τμήματα ΑΕ και ΓΖ κάθετα στη διαγώνιο ΒΔ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Υπόθεση	**Συμπέρασμα**
ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο	ΑΕΓΖ παραλληλόγραμμο
ΑΕ⊥ΒΔ, ΓΖ⊥ΒΔ	



Απόδειξη

Τι στόχο έχουμε; Να αποδείξουμε ότι το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. Δηλαδή πρέπει να ισχύει ένα από τα κριτήρια. Υπάρχουν παράλληλες πλευρές;

Είναι ΑΕ//ΓΖ (1) (ως κάθετες στη ΒΔ).

Τι μας αρκεί επιπλέον να αποδείξουμε για τις ΑΕ και ΓΖ; Προφανώς ότι ΑΕ = ΓΖ. Υπάρχουν ίσα τρίγωνα που περιέχουν τις ΑΕ και ΓΖ;

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ είναι ίσα, γιατί $\hat{E} = \hat{Z} = 90°$, ΑΔ = ΒΓ, αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1 = \omega$ (ως εντός εναλλάξ).

Άρα ΑΕ = ΓΖ (2). Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, αφού δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

◆ Τα ειδικά παραλληλόγραμμα μπορεί να ορισθούν όπως και στο βιβλίο. Διδακτικά όμως μπορεί να προκύψουν οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά τους από απαντήσεις σε ερωτήματα όπως:

i) Οι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου είναι ίσες;

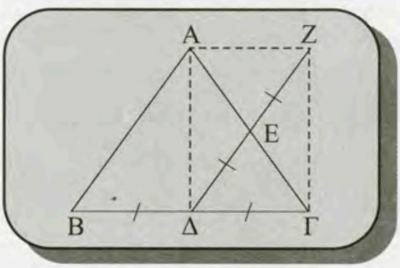
ii) Τι συμβαίνει αν επιπλέον είναι και ορθές; Κατασκευάστε ένα τέτοιο παραλληλόγραμμο. Συγκρίνετε τις διαγωνίους.

iii) Αν η διαγώνιος είναι και διχότομος των γωνιών παααραλληλογράμμων τι ιδιότητες θα έχει επιπλέον το παραλληλόγραμμο;

Για τα κριτήρια των ειδικών παααραλληλογράμμων μπορούν να παρουσιασθούν τα ακόλουθα δύο θέματα:

Θέμα 1ο: Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και τα μέσα Δ και Ε των ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ=ΔΕ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ορθογώνιο.

Υπόθεση	Συμπέρασμα
ΑΒΓ ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ) Δ,Ε μέσα των ΒΓ,ΑΓ ΔΕ=ΕΖ	ΑΖΓΔ ορθογώνιο

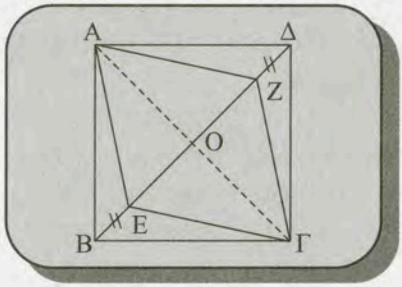


Απόδειξη

Τι στόχο έχουμε; Να αποδείξουμε ότι το ΑΖΓΔ είναι ορθογώνιο. Είναι το ΑΖΓΔ παραλληλόγραμμο; Αφού το Ε είναι μέσο της ΑΓ και ΔΕ = ΕΖ, το ΑΖΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Τι μας αρκεί επιπλέον να ισχύει; Μία γωνία του ΑΖΓΔ να είναι ορθή. Επειδή ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ διάμεσος θα είναι και ύψος, δηλαδή $A\hat{\Delta}\Gamma = 90°$. Επομένως το ΑΖΓΔ είναι ορθογώνιο.

Θέμα 2ο: Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Αν Ε και Ζ σημεία της διαγωνίου ΒΔ, ώστε ΒΕ = ΔΖ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ρόμβος.

Υπόθεση	**Συμπέρασμα**
ΑΒΓΔ τετράγωνο ΒΕ=ΔΖ	ΑΕΓΖ ρόμβος



Απόδειξη

Τι στόχο έχουμε; Να αποδείξουμε ότι ΑΕΓΖ ρόμβος. Είναι το ΑΕΓΖ παραλληλόγραμμο; Αφού ΑΟ = ΟΓ (Ο κέντρο του τετραγώνου) και ΟΖ=ΟΕ (διαφορά ίσων τμημάτων), το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Τι μας αρκεί επιπλέον να ισχύει; Ότι ΑΓ⊥ΕΖ, το οποίο ισχύει, επειδή ΑΓ⊥ΒΔ ως διαγώνιοι τετραγώνου. Επομένως, το ΑΕΓΖ είναι ρόμβος.

Σχόλιο

Εκτός από τις κάθετες διαγωνίους (ΑΓ⊥ΕΖ) τι άλλο θα αρκούσε για να καταλήξουμε ότι το ΑΕΓΖ είναι ρόμβος; Ότι ΑΕ=ΓΕ. Αλλά $\hat{AEB}=\hat{\Gamma EB}$ (γιατί;), οπότε ΑΕ = ΓΕ.

Μπορεί ακόμη να ζητηθεί και η σχέση εγκλεισμού μεταξύ των διάφορων ειδών παράλληληλόγραμμων με ερωτήσεις του τύπου: Το τετράγωνο είναι ρόμβος; Ο ρόμβος είναι τετράγωνο; Ποια η σχέση μεταξύ ρόμβων και τετραγώνων;

Στα παραλληλόγραμμα να επισημανθεί και η συμμετρία που υπάρχει με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων.

Επισημαίνεται ότι πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στις εφαρμογές που αναφέρονται παρακάτω:

- Διάμεσοι τριγώνου.
- Τρίγωνα και παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται αν από τις κορυφές τριγώνου φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές.
- Ορθόκεντρο τριγώνων.

Αφού βρεθεί το ορθόκεντρο τριγώνου να παρατηρήσουν οι μαθητές ότι κάθε κορυφή είναι ορθόκεντρο του τριγώνου που σχηματίζεται από τις δύο άλλες κορυφές και το ορθόκεντρο. Η ανάπτυξη αυτού του θέματος μπορεί να δοθεί με ερωτήσεις:

Δίνεται το ορθόκεντρο Η του ΑΒΓ.

i) Ποιο το ορθόκεντρο του ΑΗΒ;

ii) Ποιο το ορθόκεντρο του ΑΗΓ;

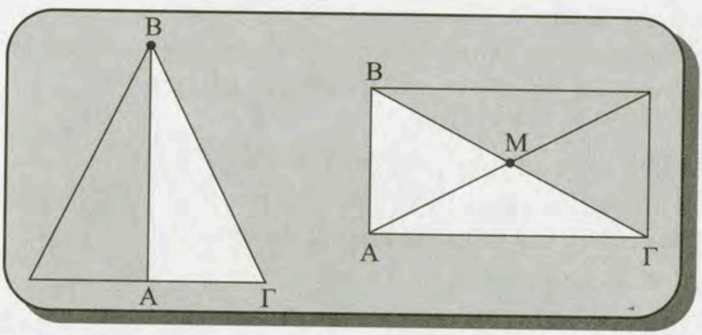
iii) Ποιο το ορθόκεντρο του ΒΗΓ; Τι παρατηρείτε;

iv) Διατυπώστε την πρόταση.

Για τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου που σχηματίζουν παραλληλόγραμμο να τονισθεί ότι ισχύει ό,τι και για το μη κυρτό τετράπλευρο.

Για το ορθογώνιο τρίγωνο που έχει γωνία 30°, να γίνει η παρατήρηση ότι η σχέση $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$ προκύπτει και από ισόπλευρο, αν φέρουμε το ύψος του.

Για τη διάμεσο ΑΜ και τη σχέση $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$ να γίνει η συσχέτιση του ορθογώνιου τριγώνου με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



Για το τραπέζιο να γίνει η παρατήρηση ότι προκύπτει από το τρίγωνο αν φέρουμε μια ευθεία παράλληλη προς μια πλερά που τέμνει τις δύο άλλες πλευρές. Εδώ μπορεί να γίνουν και σχόλια για το ισοσκελές τραπέζιο που προκύπτει από το ισοσκελές τρίγωνο. Το τραπέζιο με δύο ορθές γωνίες προκύπτει από το ορθογώνιο τρίγωνο.

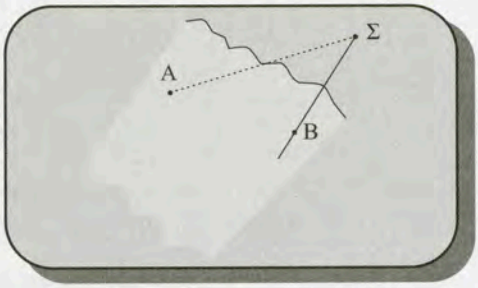
Αξιολόγηση και ενδεικτικά κριτήρια

Η αξιολόγηση γίνεται φυσικά με βάση τους στόχους που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Έτσι για τις ιδιότητες και τα κριτήρια παραλληλογράμμων και ειδικών παραλληλογράμμων προτείνονται: ερωτήσεις κατανόησης όπως αυτές που αναφέρονται στο διδακτικό βιβλίο, και ασκήσεις κατασκευαστικές όπως:

1) Να κατασκευασθεί παραλληλόγραμμο, για το οποίο δύο ευθύγραμμα τμήματα που δίνονται είναι διαγώνιοι. Πόσα διαφορετικά παραλληλόγραμμα κατασκευάζονται;

2) Στο διπλανό σχήμα να υπολογισθούν οι αποστάσεις των Α και Β από το απρόσιτο σημείο Σ, καθώς και η γωνία $\hat{\Sigma}$ με την κατασκευή παραλληλογράμμου.

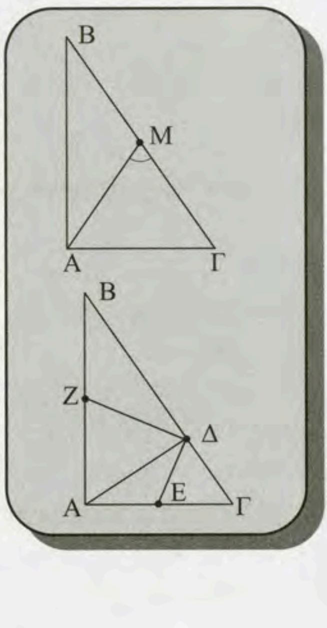


Για τον έλεγχο κατανόησης των ιδιοτήτων και κριτηρίων μπορεί να δοθούν ερωτήσεις που αναφέρονται π.χ. σε διαφορές και ομοιότητες: ρόμβου – τετραγώνου, ορθογωνίου – ρόμβου, τετραγώνου – ορθογωνίου.

Επίσης, μπορούν να κατασκευαστούν είδη παραλληλογράμμου, με κορυφές τα μέσα πλευρών ρόμβου ή τα μέσα πλευρών τετραγώνου.

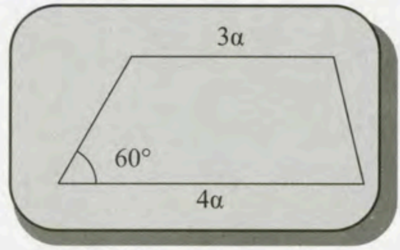
Τέλος, χρήσιμες είναι οι αποδεικτικές ασκήσεις που αναφέρονται στο βιβλίο καθώς και μια επιλογή από τα σύνθετα θέματα.

Ανάλογες είναι και οι ασκήσεις που αναφέρονται στο βαρύκεντρο και ορθόκεντρο του τριγώνου και διακρίνονται σε κατασκευαστικές: π.χ. «Να σχηματισθεί το τρίγωνο του οποίου δίνονται δύο κορυφές και το βαρύκεντρο, ή δύο κορυφές και το ορθόκεντρο», και υπολογιστικές: «Στο διπλανό σχήμα να υπολογισθούν οι γωνίες και η διάμεσος του ορθογώνιου τριγώνου», ή «Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 2β, ΑΓ = β, ΑΔ κάθετος στην ΒΓ και ΔΕ, ΔΖ οι διάμεσοι των δύο τριγώνων. Να υπολογισθεί η περίμετρος του ΑΖΔΕ».



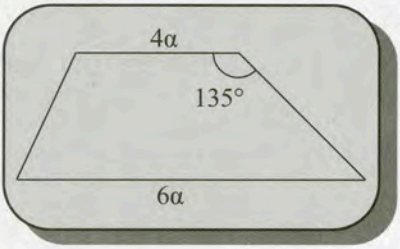
Για τα τραπέζια προτείνονται διάφορες υπολογιστικές ασκήσεις, όπως:

«Στο παρακάτω ισοσκελές τραπέζιο να υπολογισθεί η περίμετρός του»,



ή

«Στο ισοσκελές τραπέζιο του σχήματος να υπολογισθεί το ύψος του».



1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. Τα μήκη πλευρών παραλληλογράμμου είναι:

$15 - x, x + 5, 2x + 10, x + 15.$

i) Ποιες μπορεί να είναι οι απέναντι πλευρές;

ii) Να υπολογισθεί το x.

2. Από σημείο της βάσης ισοσκελούς τριγώνου φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές. Σχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του παραλληλογράμμου είναι ίση με το άθροισμα των ίσων πλευρών.

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$), $\hat{B} = \varphi$ και $\hat{\Gamma} = \omega$. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν η διάμεσος και το ύψος από την Α προς την υποτείνουσα από τις γωνίες φ και ω.

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

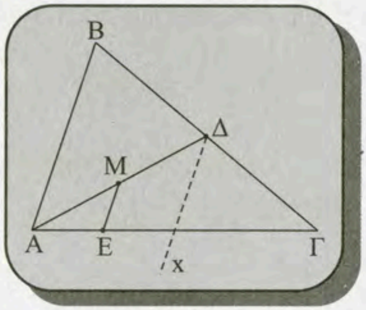
1. Οι διαδοχικές γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι x και $4x - 10$. Να υπολογισθούν οι γωνίες του.

2. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ//ΓΔ και ΑΒ = ΑΔ. Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$.

3. Από το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλο στην ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε και Δx//ΑΒ.

i) Να αποδείξετε ότι το ΑΕ είναι το $\frac{1}{4}$ της ΑΓ.

ii) Να αποδείξετε ότι το ΜΕ είναι το $\frac{1}{4}$ του ΑΒ.



Απαντήσεις των ερωτήσεων κατανόησης

§ 5.1 – 5.2

1. Παραλληλόγραμμα είναι το 1ο, το 4ο και το 6ο.

2. § 5.2 Κριτήρια.

3. $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 105°$, $\hat{B} = \hat{\Delta} = 75°$.

4. $3\omega = 180°$, οπότε $\omega = 60°$, $\varphi = 120°$.

5. Σωστό μόνο το ii).

§ 5.3 – 5.5

1. i) Ορθογώνια είναι το 1ο, 2ο και 4ο.
ii) Ρόμβοι είναι το 1ο και το 2ο.
iii) Τετράγωνο είναι το 2ο.

2. i) § 5.3 Κριτήρια.
ii) § 5.4 Κριτήρια.

3. i) Σε 4 ισοσκελή τρίγωνα, ανά δύο ίσα.
ii) Σε 4 ίσα ορθογώνια τρίγωνα.
iii) Σε 4 ισοσκελή και ίσα ορθογώνια τρίγωνα.

4. i) **Ομοιότητες:** Ίσες πλευρές – κάθετες διαγώνοι.
Διαφορές: Το τετράγωνο έχει ορθές γωνίες και ίσες διαγώνοι
ii) **Ομοιότητες:** Ορθές γωνίες – ίσες διαγώνοι
Διαφορές: Στο τετράγωνο οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.
iii) **Ομοιότητες:** Απέναντι πλευρές παράλληλες – οι διαγώνιοι διχοτομούνται.
Διαφορές: Ο ρόμβος έχει ίσες πλευρές και οι διαγώνοι τέμνονται κάθετα.

5. Λάθος είναι μόνο η δεύτερη πρόταση.

§ 5.6 – 5.9

1. α) $x = 2$, β) $x = \frac{3}{2}$, $y = 5$, γ) $x = 3{,}5$, $y = 3$ δ) $x = 4$, $y = 4$

ε) $x = 3$, $y = \frac{5}{2}$, στ) $x = \frac{10}{3}$, $y = \frac{5}{3}$.

2. α) $\omega = 60°$ β) $\varphi = 30°$ γ) $\omega = 30°$, $\varphi = 30°$ δ) $\omega = 90°$.

3. Το ισόπλευρο τρίγωνο.

4. $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ και $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$.

5. Ναι, γιατί αν Μ το μέσο της ΒΓ τότε ΜΑ = ΜΒ = ΜΓ.

§ 5.10 – 5.11

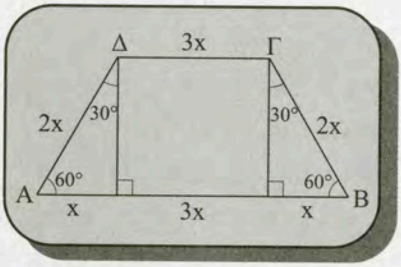
1. α) $x = 5$, $y = 4$ β) $x = 1$, $y = 1{,}5$

γ) $x = 1$ δ) $\omega = 60°$, $\theta = 60°$.

2. § 5.11 Κριτήρια.

3. § 5.10 Θεώρημα Ι.

4. Από το διπλανό σχήμα προκύπτει ότι η περίμετρος είναι 12x.



Λύσεις των Δραστηριοτήτων - Εργασιών

Δραστηριότητες Τέλος Κεφαλαίου

1. Αρκεί να φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΔ, από το μέσο Μ της ΑΒ.

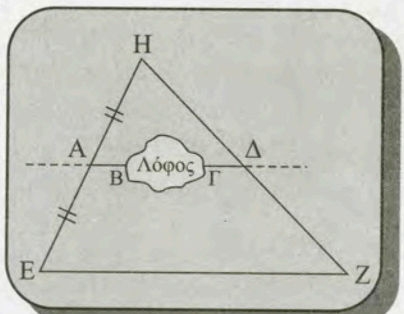
2. Απλή.

3. Απλή.

4. Απλή.

Εργασία Τέλος Κεφαλαίου

Εκατέρωθεν του σημείου Α παίρνουμε στην πεδιάδα δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα (σε ευθεία) ΑΗ και ΑΕ τέτοια ώστε από το σημείο Η να βλέπουμε το μέρος της πεδιάδας που βρίσκεται πίσω από το λόφο. Φέρουμε ΕΖ//ΑΒ και ενώνουμε το Ζ με το Η σχηματίζοντας το τρίγωνο ΗΕΖ. Βρίσκουμε το μέσο Δ του ΗΖ και φέρουμε από το Δ την ευθεία ΔΓ παράλληλη προς τη ΖΕ. Αυτή θα είναι η **προέκταση** της σιδηροδρομικής γραμμής γιατί θα διέρχεται από το μέσο Α της πλευράς ΗΕ.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Εγγεγραμμένα σχήματα

Ενδεικτικός αριθμός ωρών διδασκαλίας: 8

Στο κεφάλαιο αυτό αξιοποιώντας γνώσεις προηγούμενων κεφαλαίων (θέση σημείου ή ευθείας ως προς κύκλο) οδηγούμαστε στον ορισμό της εγγεγραμμένης γωνίας, της οποίας εξετάζουμε τη σχέση με την αντίστοιχη επίκεντρη. Το θεώρημα που εκφράζει τη σχέση αυτή αποτελεί βασικό θεώρημα του κεφαλαίου, αφού αρκετές από τις αποδείξεις που ακολουθούν στηρίζονται σε αυτό. Επίσης, βασικό είναι το συμπέρασμα που αναφέρεται στα σημεία του επιπέδου που βλέπουν ένα ευθύγραμμο τμήμα υπό γνωστή γωνία. Τα δύο αυτά αποτελέσματα χρησιμοποιούνται στις αποδείξεις των κριτηρίων των εγγράψιμων τετραπλεύρων και σε προβλήματα γεωμετρικών τόπων και κατασκευών που ακολουθούν.

Ενδεικτικός προγραμματισμός

1 διδακτική ώρα για § 6.1, 6.2.
2 διδακτικές ώρες για § 6.3 και εφαρμογές.
1 διδακτική ώρα για § 6.4.
2 διδακτικές ώρες για εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα (§ 6.5 και § 6.6) και εφαρμογές.
2 διδακτικές ώρες για γεωμετρικούς τόπους και κατασκευές.

Διδακτικοί στόχοι

- Να γνωρίζουν την εγγεγραμμένη γωνία και τη σχέση της με την αντίστοιχη επίκεντρη και το τόξο της. Επίσης τη γωνία χορδής και εφαπτομένης.
- Να εκφράζουν τη γωνία δύο τεμνουσών του κύκλου με τα τόξα που ορίζουν.

- Να κατανοήσουν το τόξο ως γεωμετρικό τόπο.
- Να γνωρίζουν τις ιδιότητες του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου και τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο.
- Να μπορούν μέσα από παραδείγματα να χρησιμοποιούν και γεωμετρικούς τόπους για γεωμετρικές κατασκευές και να μυηθούν στην αναλυτική – συνθετική μέθοδο.

Οδηγίες για τη διδασκαλία - Διδακτικές προσεγγίσεις

Ήδη οι μαθητές γνωρίζουν από το κεφάλαιο 4 το τρίγωνο που οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου. Μέσω αυτού μπορεί να εισαχθεί ως ορισμός εγγεγραμμένου σχήματος το σχήμα που οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου. Τότε φυσικά οι πλευρές του θα είναι χορδές. Μπορεί να διαπιστωθεί ότι το εγγεγραμμένο σχήμα είναι κυρτό.

Ως εφαρμογή του ορισμού να εξετασθεί πότε μια γωνία θα λέμε ότι είναι εγγεγραμμένη και να τονισθεί το τόξο και ως γεωμετρικός τόπος των σημείων που βλέπουν τη χορδή του υπό σταθερή γωνία.

Η εγγεγραμμένη γωνία θα συνδεθεί με την επίκεντρη που έχει το ίδιο τόξο, γιατί η μέτρηση γωνίας ανάγεται στη μέτρηση του τόξου της αν γίνει επίκεντρη.

Οι θέσεις γωνίας και κύκλου να γίνουν κατασκευαστικά και ως δραστηριότητα να βρεθούν τα μέτρα τους ως συνάρτηση των τόξων του κύκλου που ορίζονται μεταξύ των πλευρών της γωνίας. Οι κατασκευές αυτές είναι:

1. Να κατασκευασθεί γωνία που η κορυφή της είναι εκτός του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο. Ποια η σχέση του μέτρου της με τα τόξα που περιέχονται στη γωνία;
2. Να κατασκευασθεί γωνία που η κορυφή της είναι εκτός του κύκλου και οι πλευρές της εφαπτόμενες. Ποιο το μέτρο της;
3. Να κατασκευασθεί γωνία με κορυφή εκτός κύκλου. Να βρείτε το μέτρο της από τα μέτρα των τόξων που ορίζονται από τις πλευρές της και τις πλευρές της κατακορυφήν γωνίας.
4. Να κατασκευασθεί γωνία με κορυφή στον κύκλο και πλευρές εφαπτομένη και χορδή αντίστοιχα.

• **Τετράπλευρο εγγεγραμμένο και εγγράψιμο**

Κατασκευάζοντας ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο με κατάλληλες ερωτήσεις οι μαθητές οδηγούνται στην ανακάλυψη των σχέσεων μεταξύ των γωνιών του.

Πόρισμα: Τα είδη των εγγεγραμμένων παραλληλογράμμων.

Στη συνέχεια εξετάζεται αν καθεμία από τις προηγούμενες σχέσεις είναι ικανή να εξασφαλίσει την ύπαρξη κύκλου που διέρχεται από τις τέσσερις κορυφές τετραπλεύρου.

Διαπιστώνοντας ότι οι σχέσεις αυτές είναι ικανές, χαρακτηρίζονται ως κριτήρια ώστε δεδομένο τετράπλευρο να είναι εγγράψιμο.

• **Περιγεγραμμένα σχήματα**

Εφαπτόμενες σε σημεία του κύκλου, εφόσον τέμνονται διαδοχικά, ορίζουν το περιγεγραμμένο ευθύγραμμο σχήμα.

Έχει εξετασθεί ήδη στο κεφάλαιο 4 το περιγεγραμμένο τρίγωνο.

Για το περιγεγραμμένο τετράπλευρο θα βρεθεί η χαρακτηριστική ιδιότητα: το άθροισμα δύο απέναντι πλευρών ισούται με το άθροισμα των άλλων δύο.

Μετά την παραπάνω πρόταση, προκύπτουν ως πορίσματα τα είδη των περιγεγραμμένων παραλληλογράμμων.

Ως παρατήρηση προτείνεται η εξής:

Στα εγγεγραμμένα τετράπλευρα έχουμε σχέση μεταξύ γωνιών, στα περιγεγραμμένα τετράπλευρα έχουμε σχέση μεταξύ των πλευρών.

Εδώ μπορεί να γίνει μία πρώτη νύξη ότι η περίμετρος ενός εγγεγραμμένου σχήματος που έχει μεγάλο αριθμό πλευρών ή πλήθος πλευρών που τείνει στο άπειρο προσεγγίζει τον κύκλο.

Η έννοια του γεωμετρικού τόπου είναι γνωστή από τη μεσοκάθετο, τον κύκλο, τη διχοτόμο γωνίας. Με κατάλληλα παραδείγματα επισημαίνεται ότι σε ένα σχήμα που μεταβάλλονται κάποια στοιχεία είναι δυνατόν ένα σημείο να κινείται σε ορισμένη γραμμή. Να δοθούν παραδείγματα όπου προσδιορίζεται πρακτικά και εμπειρικά ο γεωμετρικός τόπος, ακόμη και όταν δεν προκύπτει ως γεωμετρικός τόπος ευθεία ή κύκλος.

Θα τονισθεί ότι τα σημεία ενός γεωμετρικού τόπου έχουν μια χαρακτηριστική ιδιότητα και την έχουν μόνο αυτά. Ως παράδειγμα μπορεί να δοθεί το παρακάτω:

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν σταθερή απόσταση από ευθεία ε. Εκτός της παραλλήλου που θα βρεθεί, υπάρχει και δεύτερη παράλληλος στο άλλο ημιεπίπεδο.

Φυσικά ένας γεωμετρικός τόπος θα είναι ευθεία, κύκλος ή τόξο, αφού η ιδιότητα θα είναι ιδιότητα μεσοκαθέτου, διχοτόμου, κύκλου ή τόξου.

Για την εύρεση του τόπου, ο τρόπος εύρεσης μέσα από τα παραδείγματα εισάγει στην ανάλυση και σύνθεση.

Στην εύρεση του γεωμετρικού τόπου πρέπει να εντοπίζονται και τα οριακά σημεία, τα οποία ανήκουν ή όχι στον τόπο.

Εφαρμογή των γεωμετρικών τόπων είναι και οι κατασκευές. Τονίζεται ότι στην περίπτωση που η κατασκευή ανάγεται στην εύρεση ενός σημείου, για τον εντοπισμό του σημείου, ζητείται κάποιος γεωμετρικός τόπος του. Αν βρεθεί και δεύτερος τόπος του, τότε το ζητούμενο είναι η τομή των δύο τόπων.

Τέτοιο παράδειγμα έχει ήδη αντιμετωπισθεί στην κατασκευή τριγώνων όταν δίνονται τρεις πλευρές. Θα πρέπει να αναφερθεί και να τονισθεί ο τρόπος εργασίας: όταν πάρουμε τη μια πλευρά έχουμε ήδη τις δύο κορυφές, επομένως ζητάμε την τρίτη. Η τρίτη κορυφή απέχει από τη μια και την άλλη κορυφή αποστάσεις γνωστές, οπότε βρίσκεται σε δύο κύκλους κτλ.

Αυτή είναι η μεθοδολογία γεωμετρικών κατασκευών μέσω των γεωμετρικών τόπων. Στο βιβλίο υπάρχουν ως παραδείγματα κατάλληλα προβλήματα κατασκευών.

Εδώ πρέπει να εξηγηθεί στους μαθητές ή αναλυτική – συνθετική μέθοδος.

Στην ανάλυση: Δεχόμαστε αυτό που έχουμε να αποδείξουμε ή να κατασκευάσουμε ότι ισχύει. Αυτή η παραδοχή συνεπάγεται κάποια άλλη πρόταση η οποία συνεπάγεται κάποια άλλη κ.ο.κ. μέχρι να φθάσουμε σε κάποια που ισχύει ή σε κάτι που είναι δυνατόν να κατασκευασθεί, αν πρόκειται για κατασκευή. Αυτό μας έχει εξασφαλίσει το ξεκίνημα για να κάνουμε την απόδειξη ή κατασκευή και ακολουθεί η αντίστροφη πορεία που αποτελεί τη **σύνθεση.**

Αν πρόκειται για κατασκευή, ακολουθεί η **απόδειξη** και η **διερεύνηση.**

Στην απόδειξη ελέγχουμε αν το σχήμα που κατασκευάσαμε έχει τα στοιχεία που έχουν δοθεί, οπότε είναι το ζητούμενο.

Με τη διερεύνηση εξετάζουμε αν με τα δεδομένα στοιχεία υπάρχει πάντα λύση ή πρέπει να πληρούν κάποιο περιορισμό και ακόμη πόσες λύσεις μπορούν να υπάρχουν.

Αξιολόγηση και ενδεικτικά κριτήρια

Για τις εγγεγραμμένες γωνίες δίνονται σχήματα όπως αυτά της ομάδας **ασκήσεις εμπέδωσης** (σελ. 129), όπου οι μαθητές υπολογίζουν τόξα και γωνίες. Δίνονται επίσης υπολογιστικές ασκήσεις για εγγράψιμα και περιγράψιμα τετράπλευρα.

Έμφαση θα πρέπει να δοθεί στις κατασκευές, κυρίως τριγώνων, που γίνεται χρήση των γεωμετρικών τόπων. Τέτοιες ασκήσεις υπάρχουν στα σύνθετα θέματα.

Ακόμη μπορεί να γίνουν και κατασκευές κύκλου (προβλήματα Απολλωνίου), ο οποίος:

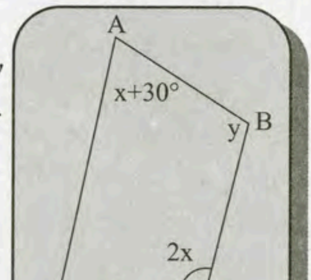
i) να εφάπτεται των πλευρών γωνίας και να έχει δοσμένη ακτίνα,

ii) να εφάπτεται ευθείας σε δοσμένο σημείο και να διέρχεται από άλλο δοσμένο,

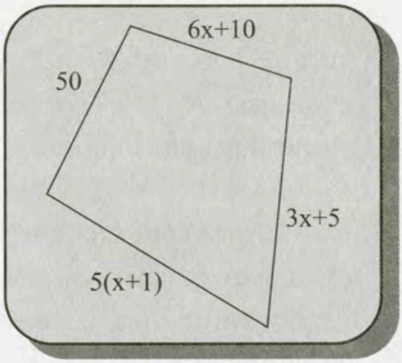
iii) να εφάπτεται κύκλου και ευθείας σε ορισμένο σημείο.

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

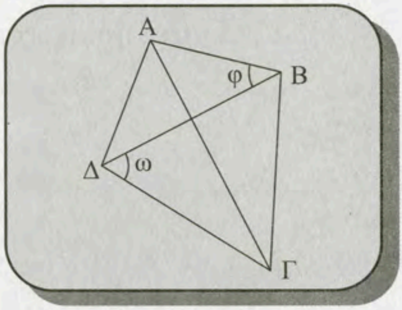
1. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με μέτρα των γωνιών όπως στο σχήμα είναι εγγράψιμο. Να υπολογισθούν οι γωνίες του.



2. Στο διπλανό τετράπλευρο που είναι περιγράψιμο σε κύκλο σημειώνονται τα μήκη των πλευρών του. Να υπολογισθεί η τιμή του άγνωστου x και τα μήκη των πλευρών του.



3. Το διπλανό τετράπλευρο είναι εγγράψιμο και είναι γνωστά τα μέτρα των γωνιών φ και ω. Να υπολογισθεί η γωνία των διαγωνίων.



4. i) Ποια από τα ειδικά παραλληλόγραμμα είναι εγγράψιμα;

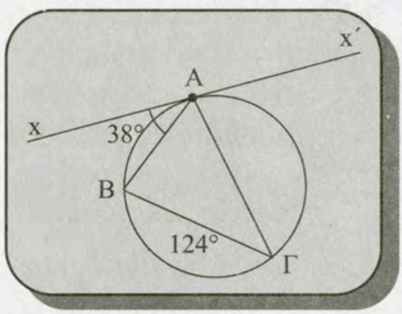
ii) Ποια από τα παραλληλόγραμμα είναι περιγράψιμα;

iii) Στο εσωτερικό τριγώνων να βρεθεί σημείο που να βλέπει και τις τρεις πλευρές με την ίδια γωνία. Ποιο είναι το μέγεθος της γωνίας;

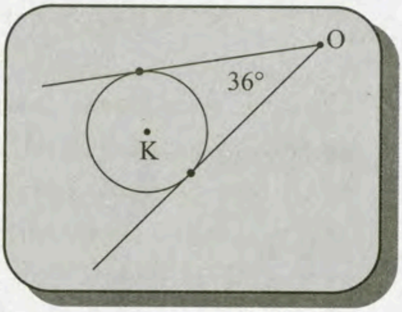
2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

(Ολιγόλεπτης διάρκειας)

1. Στο διπλανό σχήμα να υπολογισθούν οι γωνίες του τριγώνου, αν η xx΄ είναι εφαπτομένη και $\overset{\frown}{ΒΓ} = 124°$.



2. Το τόξο που είναι μεταξύ των δύο εφαπτομένων είναι 36°. Να υπολογίσετε τη γωνία των εφαπτομένων.



3. Να κατασκευάσετε τον κύκλο που εφάπτεται σε δύο τεμνόμενες ευθείες και δίνεται το σημείο επαφής Α της μιας από αυτές.

Απαντήσεις των ερωτήσεων κατανόησης

§ 6.1 – 6.4

2. γ

§ 6.6

1. i) Σ ii) Σ

2. δ

3. Όχι

4. i) Ορισμός

ii) Εύκολα αποδεικνύεται ότι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του τετραπλεύρου ισαπέχει από τις κορυφές του.

6. Εγγράψιμα είναι το ορθογώνιο και το τετράγωνο. Το τραπέζιο είναι εγγράψιμο μόνον όταν είναι ισοσκελές (εφαρμογή § 6.6).

§ 6.7

1. i) Ο κύκλος (Ο,ρ).

ii) Η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

iii) Δύο ευθείες παράλληλες προς την ε και σε απόσταση λ από αυτή.

iv) Η διχοτόμος της γωνίας.

v) Οι διχοτόμοι των τεσσάρων γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες.

vi) Αν d είναι η απόσταση των δύο δοσμένων ευθειών ε,ζ, τότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι μια ευθεία μ παράλληλη προς τις ε, ζ και σε απόσταση $\frac{d}{2}$ από αυτές.

vii) Δύο τόξα κύκλου που γράφονται με χορδή την ΑΒ και δέχονται γωνία ω (§ 6.4).

2. i) Σ ii) Σ iii) Λ iv) Σ v) Λ

Λύσεις των Δραστηριοτήτων - Εργασιών

Δραστηριότητα § 6.6

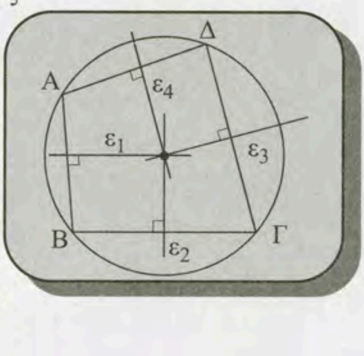
i) Υπάρχουν άπειροι κύκλοι που διέρχονται από τα δύο δοσμένα σημεία. Τα κέντρα όλων αυτών των κύκλων βρίσκονται πάνω στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος, που ενώνει τα δύο αυτά σημεία.

ii) Έστω Α, Β, Γ τα δοσμένα σημεία. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά. Τότε, όπως είναι γνωστό, υπάρχει ένας μόνον κύκλος που διέρχεται από αυτά. Αυτός είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ.
- Τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. Τότε, δεν υπάρχει κύκλος που διέρχεται από αυτά αφού, όπως είναι γνωστό, μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

iii) Έστω Α, Β, Γ, Δ τα δοσμένα σημεία. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

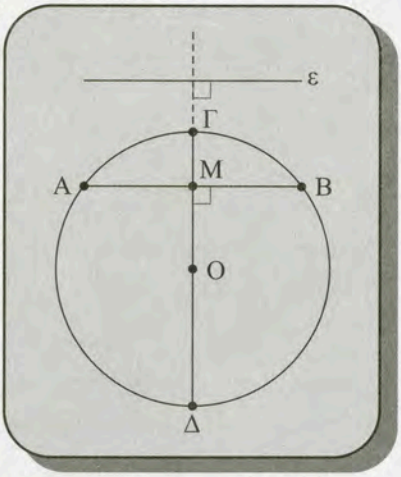
- Τρία τουλάχιστον από τα Α, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά. Τότε, είναι φανερό (περ. ii) ότι δεν υπάρχει κύκλος που να διέρχεται από τα Α, Β, Γ, Δ.



- Τα Α, Β, Γ, Δ είναι κορυφές κυρτού τετραπλεύρου. Τότε, υπάρχει κύκλος που διέρχεται από αυτά μόνον όταν το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο. Στην περίπτωση αυτή το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του τετραπλεύρου.

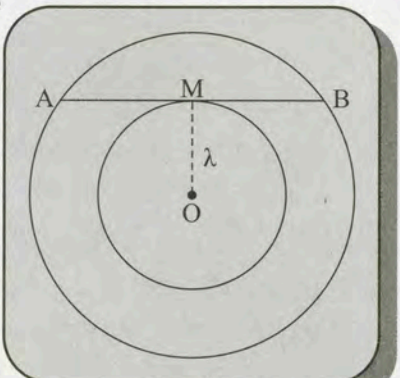
Δραστηριότητα § 6.7

i) Έστω κύκλος κέντρου Ο και ευθεία ε. Αν ΑΒ είναι μια χορδή παράλληλη προς την ε και Μ το μέσο της, τότε ΟΜ⊥ΑΒ και επομένως ΟΜ⊥ε. Άρα το Μ βρίσκεται στη διάμετρο ΓΔ που είναι (αυτή ή ο φορέας της) κάθετη στην ε. Για το αντίστροφο παρατηρούμε ότι στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ το ΟΜ είναι ύψος, άρα θα είναι και διάμεσος, οπότε το Μ είναι μέσο του ΑΒ. Επομένως, γεωμετρικός τόπος του Μ είναι η διάμετρος ΓΔ που είναι (αυτή ή ο φορέας της) κάθετη στην ε.

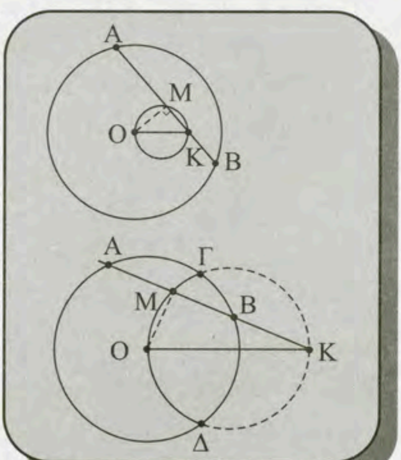


ii) Έστω κύκλος κέντρου Ο και μια χορδή του ΑΒ από την οποία το Ο απέχει σταθερή απόσταση λ. Φέρουμε ΟΜ⊥ΑΒ, οπότε το Μ είναι μέσο του ΑΒ και ΟΜ=λ. Επομένως το Μ βρίσκεται στον κύκλο (Ο,λ).

Για το αντίστροφο, αν Μ είναι ένα σημείο του κύκλου (Ο,λ) και φέρουμε χορδή ΑΒ⊥ΟΜ, τότε το Μ είναι μέσο του ΑΒ, αφού το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές. Άρα, ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι ο κύκλος (Ο,λ).

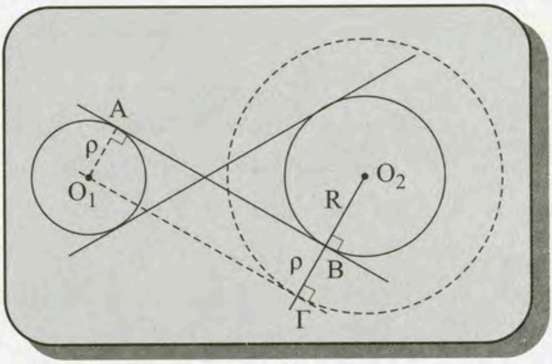


iii) Έστω Ο το κέντρο ενός δοσμένου κύκλου, μια χορδή του ΑΒ, Κ το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχεται η ΑΒ ή ο φορέας της και Μ το μέσο της ΑΒ. Τότε $O\hat{M}K = 90°$ και επομένως το Μ βρίσκεται στον κύκλο ή σε τόξο του κύκλου διαμέτρου ΟΚ, που βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου κέντρου Ο ή πάνω στον κύκλο αυτό. Για το αντίστροφο, αν Μ είναι ένα σημείο του κύκλου διαμέτρου ΟΚ ή του τόξου του $\overset{\frown}{ΓΔ}$, επειδή $O\hat{M}K = 90°$, το Μ θα είναι το μέσο της χορδής ΑΒ. Επομένως ο



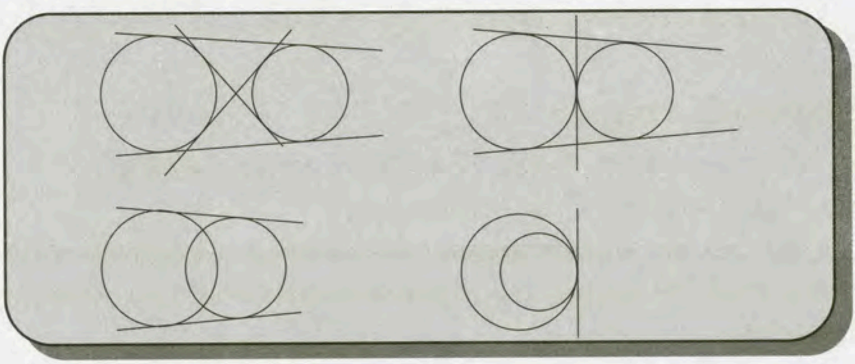
γεωμετρικός τόπος του Μ είναι ο κύκλος διαμέτρου ΟΚ στην περίπτωση που το Κ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου κέντρου Ο και το τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ του κύκλου διαμέτρου ΟΚ όταν το Κ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου.

Δραστηριότητα § 6.8



Έστω ΑΒ μια κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων (O_1,ρ) και (O_2,R). Από το O_1 φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την προέκταση της O_2B στο Γ. Τότε το $O_1AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο, οπότε:

$B\Gamma = O_1A = \rho$ και $O_1\Gamma \perp O_2\Gamma$. Επομένως, η $O_1\Gamma$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $(O_2, R+\rho)$ που άγεται από το O_1. Για τη σύνθεση γράφουμε τον κύκλο $(O_2, R+\rho)$ και από το O_1 φέρουμε τις εφαπτόμενες (πρόβλημα 3, σελ.137). Αν $O_1\Gamma$ είναι μια εφαπτομένη από το O_1 προς τον $(O_2, R+\rho)$ και Β το σημείο τομής της $O_2\Gamma$ με τον (O_2,R) τότε η παράλληλη από το Β προς την $O_1\Gamma$ είναι μια ζητούμενη κοινή εσωτερική εφαπτομένη. Προφανώς υπάρχει και δεύτερη εσωτερική εφαπτομένη. Το πλήθος των κοινών εσωτερικών και εξωτερικών εφαπτομένων δύο κύκλων, ανάλογα με τις σχετικές τους θέσεις φαίνεται στα επόμενα σχήματα.



Αναλογίες – Θεώρημα Θαλή

Ενδεικτικός αριθμός ωρών διδασκαλίας: 7

Το κεφάλαιο αυτό αναφέρεται στη μέτρηση. Αρχικά εισάγονται οι έννοιες του λόγου, του μέτρου και της αναλογίας ευθύγραμμων τμημάτων που είναι σημαντικές για την κατανόηση των επόμενων κεφαλαίων.

Στη συνέχεια αποδεικνύεται το θεώρημα του Θαλή που είναι γνωστό στους μαθητές από το Γυμνάσιο και ακολουθούν – ως εφαρμογές του – οι βασικές γεωμετρικές κατασκευές (τέταρτη ανάλογος κτλ.) και τα θεωρήματα των διχοτόμων ενός τριγώνου.

Το κεφάλαιο κλείνει με ένα σημαντικό γεωμετρικό τόπο που είναι γνωστός ως Απολλώνιος κύκλος.

Ενδεικτικός προγραμματισμός

2 διδακτικές ώρες για διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε ίσα μέρη, λόγο ευθύγραμμων τμημάτων και διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος εσωτερικά και εξωτερικά σε δοσμένο λόγο.

2 διδακτικές ώρες για το θεώρημα Θαλή, εφαρμογές σε τρίγωνο, κατασκευές τετάρτης αναλόγου, συζυγή αρμονικά των Α και Β.

2 διδακτικές ώρες για θεωρήματα διχοτόμων στο τρίγωνο.

1 διδακτική ώρα για τον Απολλώνιο κύκλο.

Διδακτικοί στόχοι

• Να γνωρίζουν τι σημαίνει λόγος δύο ευθύγραμμων τμημάτων και τις έννοιες του μέτρου και της μέτρησης.

• Να μπορούν να διατυπώνουν το θεώρημα του Θαλή και να γράφουν αναλογίες σε ένα σχήμα που υπάρχουν οι προϋποθέσειςτου θεωρήματος του Θαλή.

• Να μπορούν να διαιρούν ευθύγραμμο τμήμα σε δοσμένο λόγο, εσωτερικά και εξωτερικά και να κατανοήσουν την έννοια των αρμονικών συζυγών ως προς Α και Β, καθώς και την αρμονική τετράδα.

• Να γνωρίζουν τα θεωρήματα των διχοτόμων στο τρίγωνο.

• Να γνωρίζουν τον Απολλώνιο κύκλο.

Οδηγίες για τη διδασκαλία - Διδακτικές προσεγγίσεις

Ξεκινώντας από το $\nu \cdot AB = \Gamma\Delta$ που είναι γνωστό από το κεφάλαιο 2, μπορούμε να μιλήσουμε αντίστροφα:

i) για διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε ν ίσα μέρη, δηλαδή για το $\frac{1}{\nu}AB$,

ii) για το $\frac{\mu}{\nu}AB = \mu\left(\frac{1}{\nu}AB\right)$,

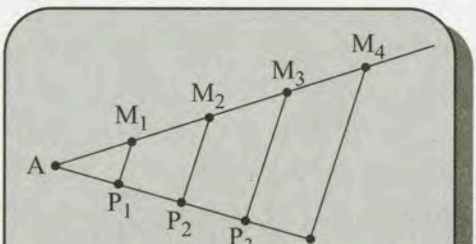
iii) για το λόγο δύο τμημάτων.

Θα ορισθεί ακόμη η μέτρηση και το μέτρο.

Για τη διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος θα γίνει αναφορά σε γνωστό θεώρημα του 5ου κεφαλαίου και θα γίνει η διαίρεση σε ν ίσα μέρη.

Η διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος και το σχήμα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εντοπίσουν ίσους λόγους, πριν από τη διατύπωση του θεωρήματος του Θαλή.

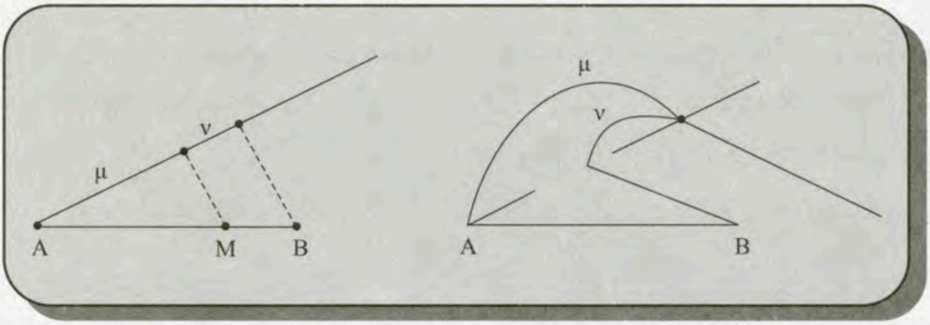
Έτσι, αφού $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4$ και $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3B$ μπορούμε να ζητήσουμε τους λόγους $\frac{AM_3}{AM_1}$ και $\frac{AP_3}{AP_1}$ και να φθάσουμε στην αναλογία, καθώς και σε άλλες αναλογίες.



Στη συνέχεια διατυπώνουμε το θεώρημα του Θαλή διαιρώντας σε ίσα τμήματα (αν είναι σύμμετρα), όπως στο βιβλίο.

Αμέσως πρέπει να ακολουθήσει ως εφαρμογή η διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε τμήματα ανάλογα των τμημάτων α, β, γ και η κατασκευή της 4ης αναλόγου, καθώς και η εφαρμογή του θεωρήματος στο τρίγωνο.

Η διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος από σημείο Μ εσωτερικό ή εξωτερικό σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, μπορεί να γίνει με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή και φυσικά, όπως αναφέρεται στο βιβλίο, με τα τρίγωνα που έχουν ανάλογες πλευρές.



Από τη διαίρεση εσωτερικά και εξωτερικά θα προκύψουν τα συζυγή αρμονικά και η αρμονική τετράδα.

Εδώ μπορεί να γίνει νύξη ότι εκτός από τα Μ και Μ΄ που βρίσκονται στην ευθεία των ΑΒ, υπάρχουν και άλλα σημεία Σ του επιπέδου, για τα οποία ο λόγος των αποστάσεων $\frac{\Sigma A}{\Sigma B}$ είναι δοσμένος. Τα σημεία αυτά αποτελούν ένα γεωμετρικό τόπο. Μπορούμε μάλιστα αν πάρουμε συγκεκριμένο λόγο, π.χ. 2, και γράψουμε τους κύκλους (Α,2ρ), (Β,ρ) και όταν αυτοί τέμνονται να έχουμε τέτοια σημεία.

Τα θεωρήματα των διχοτόμων στο τρίγωνο θα εξετασθούν ως εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή. Με κατάλληλες ασκήσεις από τις ασκήσεις Εμπέδωσης ή και από τις Αποδεικτικές ασκήσεις θα κατανοήσουν οι μαθητές ότι με το θεωρήμα του Θαλή και κατάλληλους συνδυασμούς μπορεί να οδηγηθούν και σε άλλες σχέσεις.

Τέλος από τα δύο θεωρήματα των διχοτόμων οδηγούμαστε στον Απολλώνιο κύκλο.

Αξιολόγηση και ενδεικτικά κριτήρια

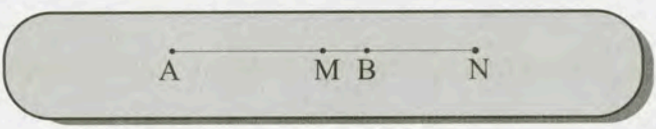
Όπως πάντα στη Γεωμετρία η κατασκευή οδηγεί στην εμπέδωση της γνώσης. Γι' αυτό θα πρέπει να γίνει έλεγχος, κατ' αρχήν αν οι μαθητές μπορούν να διαιρούν ευθύγραμμο τμήμα σε δοσμένο λόγο, να βρίσκουν αρμονικά συζυγή, να δημιουργούν σχήματα από όπου θα μπορούν να διατυπώνουν και να γράφουν αναλογίες και φυσικά να υπολογίζουν μήκη τμημάτων μέσα από τις αναλογίες ή τις ιδιότητες αυτών. Έτσι οι ερωτήσεις κατανόησης που αναφέρονται σε λόγους, όπως της §7.6 πρέπει να δίνονται στους μαθητές και μάλιστα κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.

Οι ασκήσεις εμπέδωσης που υπάρχουν σε κάθε παράγραφο βοηθούν το μαθητή να μάθει να χρησιμοποιεί τη νέα γνώση και να κάνει συνδυασμούς για να οδηγηθεί σε άλλες σχέσεις. Αν τα βήματα σε αυτές τις δραστηριότητες είναι λίγα, τότε οδηγείται στην εφαρμογή της αναλυτικής μεθόδου.

Φυσικά απώτερος στόχος είναι η ανάπτυξη της ικανότητας του μαθητή να μπορεί να αντιμετωπίζει αποδεικτικές ασκήσεις και πιο σύνθετα θέματα. Η επιλογή τους βέβαια εξαρτάται πάντα από το επίπεδο της τάξης και άλλες συνθήκες. Οι ασκήσεις αυτές είναι ομαδοποιημένες σε κάθε κεφάλαιο και αρκετές, ώστε ο διδάσκων να κάνει την επιλογή του.

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. Στο παρακάτω σχήμα τα Μ και Ν είναι συζυγή αρμονικά των Α και Β. Να υπολογισθεί το x, αν ΑΒ = 8, ΜΒ = x, ΒΝ = 4.



2. Η διάμεσος ΑΜ και η διχοτόμος ΒΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Ε.

i) Να βρείτε λόγο ίσο με τον $\frac{ΑΕ}{ΕΜ}$.

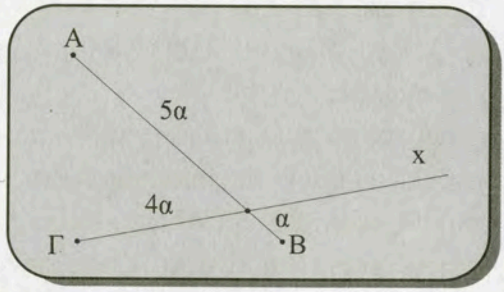
ii) Να βρείτε λόγο ίσο με τον $\frac{ΑΔ}{ΔΓ}$.

iii) Να συγκρίνετε τους λόγους $\frac{ΑΕ}{ΕΜ}$ και $\frac{ΑΔ}{ΔΓ}$.

3. Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλο στη διχοτόμο του ΑΔ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΖ.

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. Να βρεθεί επί της ημιευθείας Γx του διπλανού σχήματος, σημείο Μ ώστε ΑΜ // ΒΓ.



2. Από τυχαίο σημείο Κ της διαμέσου ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΒ και ΑΓ που τέμνουν τη ΒΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΜΔ = ΜΕ.

3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Δ και Ε χωρίζουν τη ΒΓ σε 3 ίσα τμήματα. Από το Δ φέρουμε παράλληλη στην ΑΒ η οποία τέμνει τη διάμεσο ΑΜ στο Κ.

i) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AK}{AM}$.

ii) Να αποδείξετε ότι ΚΕ // ΑΓ.

Απαντήσεις των ερωτήσεων κατανόησης

§ 7.1 – 7.6

1. i) 2 ii) $\frac{1}{2}$ iii) 2 iv) $\frac{3}{2}$

2. i) 5 ii) $\frac{1}{5}$ iii) $\frac{4}{5}$ iv) $\frac{1}{4}$

3. iv

4. ΑΜ = 4cm, ΜΟ = 2cm

§ 7.7.

1. α) $x = 3, y = 4$ β) $x = 3, y = 2$ γ) $x = 6$

δ) $x = 10, y = 16$ ε) $x = 4, y = 1{,}5$.

2. ΑΒ//ΓΔ, γιατί $\frac{ΟΑ}{ΟΒ}=\frac{ΟΓ}{ΟΔ}=\frac{3}{2}$ και ΕΖ//ΚΛ//ΜΝ, γιατί $\frac{ΚΕ}{ΚΝ}=\frac{ΛΖ}{ΛΜ}=\frac{1}{3}$.

3. i) Σ, γιατί ΑΕ = ΕΔ και ΒΖ = ΖΓ.

ii) Λ, γιατί οι ΑΒ και ΓΔ **δεν** είναι παράλληλες.

4. Όχι. Πρέπει Α, Β, Γ, Δ να είναι συνευθειακά.

5. Πρέπει $\frac{ΖΚ}{ΖΛ} = \frac{ΕΚ}{ΕΛ} = \frac{6}{2} = 3$. Άρα ΖΚ = 3 και ΖΛ = 1.

§ 7.8 – 7.9

1. Γιατί $\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΕΒ}{ΕΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$.

2. Είναι $ΔΒ = \frac{αγ}{β+γ}$ ή $\frac{γ}{2} = \frac{αγ}{β+γ}$ ή $β+γ = 2α$.

3. Παρατήρηση § 7.9.

4. Ναι, γιατί $\frac{ΙΑ}{ΙΔ} = \frac{Ι_αΑ}{Ι_αΔ} = \frac{ΑΒ}{ΒΔ}$.

5. Η μεσοκάθετος του ΑΒ (§ 7.9 Πρόβλημα – Διερεύνηση)

Λύσεις των Δραστηριοτήτων - Εργασιών

1η Δραστηριότητα Τέλος Κεφαλαίου

Απλή.

2η Δραστηριότητα Τέλος Κεφαλαίου

Απλή.

3η Δραστηριότητα Τέλος Κεφαλαίου

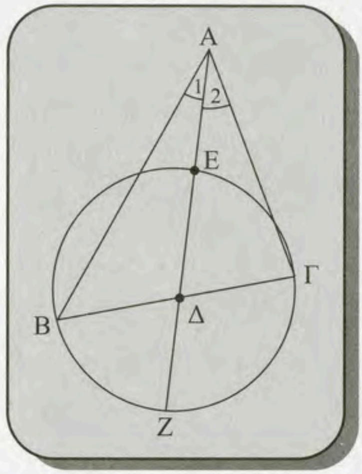
Επειδή ΑΔ διχοτόμος έχουμε

$$\frac{Β Δ}{Β Α}=\frac{α}{β+γ} \text{ και } \frac{Γ Δ}{Γ Α}=\frac{α}{β+γ}.$$

Άρα τα Β και Γ ανήκουν στον ίδιο Απολλώνιο κύκλο ως προς τα Δ και Α. Ο κύκλος έχει διάμετρο ΕΖ ώστε

$$\frac{Ε Δ}{Ε Α}=\frac{Ζ Δ}{Ζ Α}=\frac{α}{β+γ}.$$

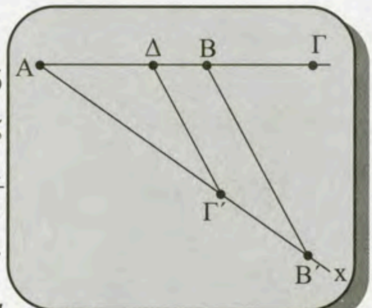
Ο λόγος $\frac{Μ Δ}{Μ Α}$ είναι $\frac{Μ Δ}{Μ Α}=\frac{α}{β+γ}$, για κάθε σημείο Μ του κύκλου.



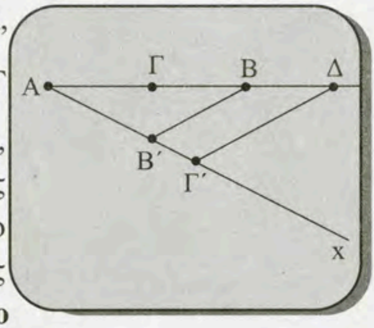
Εργασία Τέλος κεφαλαίου

1η Λύση

α) ΄Εστω ότι το σημείο Γ βρίσκεται έξω από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, προς το μέρος του Β. Πρέπει τότε να είναι $\frac{ΔΑ}{ΔΒ}=\frac{ΓΑ}{ΓΒ}$ και γι' αυτό διαιρούμε εσωτερικά το ευθ. τμήμα ΑΒ σε λόγο $\frac{ΓΑ}{ΓΒ}$. Δηλαδή σε μία ημιευθεία Αx παίρνουμε διαδοχικά τμήματα ΑΓ΄ =ΑΓ και Γ΄Β΄=ΒΓ. Η παράλληλη από το Γ΄ προς τη Β΄Β τέμνει την ΑΒ στο ζητούμενο σημείο Δ, γιατί θα είναι $\frac{ΔΑ}{ΔΒ}=\frac{ΑΓ΄}{Γ΄Β΄}=\frac{ΓΑ}{ΓΒ}$. Ανάλογα εργαζόμαστε αν το Γ βρίσκεται στην προέκταση, προς το μέρος του Α.

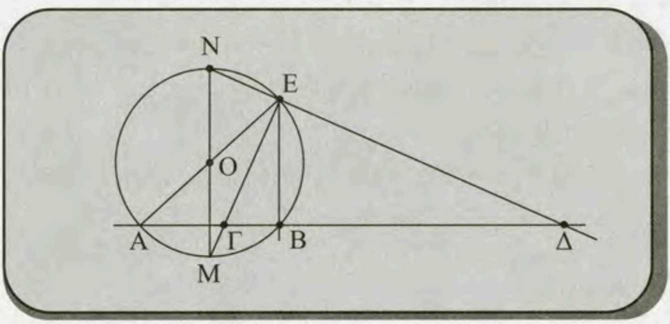


β) ΄Εστω ότι το σημείο Γ είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και μάλιστα πλησιέστερα στο Β (δηλαδή ΑΓ>ΒΓ). Σε μια ημιευθεία Αx παίρνουμε τμήμα ΑΓ΄ = ΑΓ και τμήμα Γ΄Β΄ = ΒΓ, ώστε το Β΄ να είναι μεταξύ των Α και Γ΄. Η παράλληλη από το Γ΄ προς τη Β΄Β τέμνει την ευθεία ΑΒ στο ζητούμενο σημείο Δ, γιατί είναι $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\Gamma'A}{\Gamma'B} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B}$. Αν το Γ βρίσκεται πλησιέστερα στο Α (ΑΓ < ΓΒ), εργαζόμαστε ανάλογα (γράφοντας ημιευθεία Βx κ.λπ.) και βρίσκουμε το σημείο Δ στην προέκταση προς το μέρος του Α. **Αν ΑΓ = ΓΒ, δεν ορίζεται το αρμονικό συζυγές του Γ ως προς τα Α και Β**.



2η Λύση

Γράφουμε τυχαίο κύκλο, που να διέρχεται από τα σημεία Α και Β, καθώς και τη μεσοκάθετο του ΑΒ, που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και από τα μέσα Μ και Ν των τόξων $\overset{\frown}{AB}$. Η ΜΓ τέμνει τον κύκλο σε σημείο Ε και η ΕΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{E}$ του τριγώνου ΑΕΒ, αφού είναι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$. Επιπλέον η γωνία $M\hat{E}N$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο και επομένως ορθή. Αυτό σημαίνει ότι η ΝΕΔ είναι η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{E}$ του τριγώνου ΕΑΒ, αφού είναι κάθετη στην εσωτερική διχοτόμο ΕΓ. Τότε όμως το Δ είναι το αρμονικό συζυγές του Γ ως προς τα Α και Β.



Αν είναι δοσμένο το Δ βρίσκουμε το Γ φέροντας τη ΔΝ, που τέμνει τον κύκλο στο Ε και κατόπιν τη ΜΕ, που τέμνει την ΑΒ στο Γ. Όταν το Γ είναι μέσο του ΑΒ, το Ε ταυτίζεται με το Ν και το Δ δεν ορίζεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **8**

Ομοιότητα

Ενδεικτικός αριθμός ωρών διδασκαλίας: 5

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται η έννοια της ομοιότητας ευθύγραμμων σχημάτων με ιδιαίτερη έμφαση στην ομοιότητα των τριγώνων, όπου διατυπώνονται και τα σχετικά κριτήρια. Η μελέτη της έννοιας αυτής στηρίζεται στην έννοια του λόγου ευθύγραμμων τμημάτων και της ισότητας γωνιών. Η ομοιότητα παρουσιάζεται αρχικά (§ 8.1) ως μεγέθυνση ή σμίκρυνση, που είχαν γνωρίσει οι μαθητές στο Γυμνάσιο. Είναι χρήσιμο ο διδάσκων να επισημάνει την αντιστοιχία των κριτηρίων της ομοιότητας των τριγώνων με τα κριτήρια ισότητας αυτών.

Επίσης παρουσιάζεται ένα πραγματικό πρόβλημα (εφ. 2, § 8.2) που αντιμετωπίζεται με την έννοια της ομοιότητας.

Ενδεικτικός προγραμματισμός

1 διδακτική ώρα για τον ορισμό των όμοιων σχημάτων, του λόγου ομοιότητας και το θεώρημα που αναφέρεται στο λόγο των περιμέτρων όμοιων σχημάτων.

2 διδακτικές ώρες για τα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων.

2 διδακτικές ώρες για εφαρμογές.

Διδακτικοί στόχοι

- Να αναγνωρίζουν πότε δύο σχήματα είναι όμοια και να μπορούν να προσδιορίσουν το λόγο ομοιότητας.
- Να γνωρίζουν τα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων.
- Να χρησιμοποιούν την έννοια της ομοιότητας σε εφαρμογές μεγέθυνσης- σμίκρυνσης και σε υπολογισμούς σε όμοια σχήματα με τη βοήθεια του λόγου ομοιότητας, ιδιαίτερα σε πρακτικά προβλήματα.

Οδηγίες για τη διδασκαλία - Διδακτικές προσεγγίσεις

Από ένα σύνολο όμοιων τριγώνων ή τετραγώνων, όπου πρόκειται ουσιαστικά για ένα σχήμα σε διαφορετικά μεγέθη, εισάγεται εμπειρικά η έννοια της ομοιότητας. Εδώ βέβαια μπορεί να γίνει αντιπαράθεση με ένα σύνολο ορθογωνίων που δε συμβαίνει το ίδιο.

Έτσι, με το παράδειγμα του βιβλίου (παραλληλόγραμμα, τρίγωνα) φαίνεται ότι για να είναι όμοια δύο ευθύγραμμα σχήματα, εκτός από την ισότητα των αντίστοιχων γωνιών, πρέπει και οι ομόλογες πλευρές να είναι ανάλογες. Σε κάθε ομοιότητα έχουμε και το λόγο ομοιότητας. Ακολουθεί ο ορισμός.

Για το σχηματισμό όμοιων τριγώνων μπορεί να γίνει αναφορά στο θεώρημα του Θαλή. Άλλωστε έχει αναφερθεί ως εφαρμογή στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Για το λόγο ομοιότητας που θα αποδειχθεί ότι είναι και ο λόγος των περιμέτρων θα αποδειχθεί ότι είναι και λόγος ομόλογων ευθύγραμμων τμημάτων όμοιων σχημάτων, όταν αποδειχθεί ότι όμοια ευθύγραμμα σχήματα χωρίζονται σε όμοια τρίγωνα. Έτσι, ο λόγος ομοιότητας δύο τριγώνων θα είναι και λόγος ομόλογων διχοτόμων, υψών, διαμέσων.

Τα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων καλύπτουν τη μελέτη των όμοιων σχημάτων, αφού αυτά χωρίζονται σε όμοια τρίγωνα.

Κατά τη διδασκαλία οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν ότι από την ισότητα των λόγων καταλήγουμε σε μετρικές σχέσεις, όπως φαίνεται σε διάφορες ασκήσεις. Άλλωστε στο επόμενο κεφάλαιο οι μετρικές σχέσεις προκύπτουν κυρίως από ομοιότητα σχημάτων.

Αξιολόγηση και ενδεικτικά κριτήρια

Για την κατανόηση της έννοιας της ομοιότητας αλλά και των κριτηρίων θα πρέπει να ελέγχεται κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να κατασκευάζουν δύο όμοια τρίγωνα, εφαρμόζοντας τα κριτήρια. Ακόμη αν έχουμε ένα τετράπλευρο, πώς π.χ θα κατασκευάσουμε όμοιό του με τριπλάσια περίμετρο.

Εκτός απο την κατασκευή θα πρέπει να διακρίνουν σε ένα σχήμα όμοια τρίγωνα και από τις ίσες γωνίες να γράφουν τους ίσους λόγους.

Οι ασκήσεις που αναφέρονται σε υπολογισμούς μπορεί να αναφέρονται σε πρακτικά προβλήματα, π.χ. μέτρηση κάποιου ύψους ή πλάτους ενός ποταμού. Ο σχηματισμός ενός τριγώνου όμοιου με ένα τρίγωνο που έχει πλευρά το μήκος που πρόκειται να υπολογίσουμε ειναι επιλογή του μαθητή, που κατευθύνεται βέβαια σε αυτή τη δραστηριότητα.

Τέλος υπάρχουν οι αποδεικτικές ασκήσεις που αναφέρονται κυρίως σε μετρικές σχέσεις. Με τις ασκήσεις αυτές ο μαθητής ελέγχεται για την αναλυτική του σκέψη, αφού τα ευθύγραμμα τμήματα που αναφέρονται στη σχέση οδηγούν στην επιλογή των κατάλληλων τριγώνων που πρέπει να είναι όμοια.

Ενδεικτικά κριτήρια αξιολόγησης

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. i) Να εξηγήσετε γιατί δύο ισοσκελή τρίγωνα με μία γωνία ίση είναι όμοια.

ii) Έχουμε δύο ρόμβους που η πλευρά του ενός είναι διπλάσια της πλευράς του άλλου. Να εξετάσετε αν είναι όμοιοι.

2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο με ΑΒ=12, ΑΓ =16 και ΒΓ=20 από σημείο Δ της ΑΒ φέρουμε κάθετο τμήμα στη ΒΓ, ΔΕ. Αν ΔΕ= 3, να υπολογισθούν οι πλευρές του τριγώνου ΒΔΕ.

3. Στο οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, τα ΑΔ και ΒΕ είναι ύψη. Να αποδείξετε ότι ΑΔ·ΒΓ=ΑΓ·ΒΕ. Αν Η είναι το σημείο τομής των υψών, να αποδείξετε ότι ΑΗ·ΗΔ=ΒΗ·ΗΕ.

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. i) Σε τυχαίο τρίγωνο αποκόπτουμε με παραλλήλους προς τις απέναντι πλευρές τις τρεις κορυφές. Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα που αποκόπτονται είναι όμοια.

ii) Σε τετράπλευρο να φέρετε τις διαγωνίους και να θεωρήσετε τα μέσα τους. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που σχηματίζεται με κορυφές τα μέσα των διαγωνίων είναι όμοιο με το αρχικό. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας;

2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ=12, ΑΓ= 15 και ΒΓ=18. Τα σημεία Δ και Ε των ΑΒ και ΑΓ ορίζουν τρίγωνο ΑΔΕ όμοιο του ΑΒΓ (χωρίς η ΔΕ να είναι παράλληλη στη ΒΓ) το οποίο έχει περίμετρο 9. Να υπολογίσετε τις πλευρές του.

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος ΑΔ στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι $ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$.

Απαντήσεις των ερωτήσεων κατανόησης

1. i) Ναι   ii) Ναι

2. Όχι

3. $\frac{ΕΖ}{ΒΓ} = \frac{1}{3}$

4. 2,5

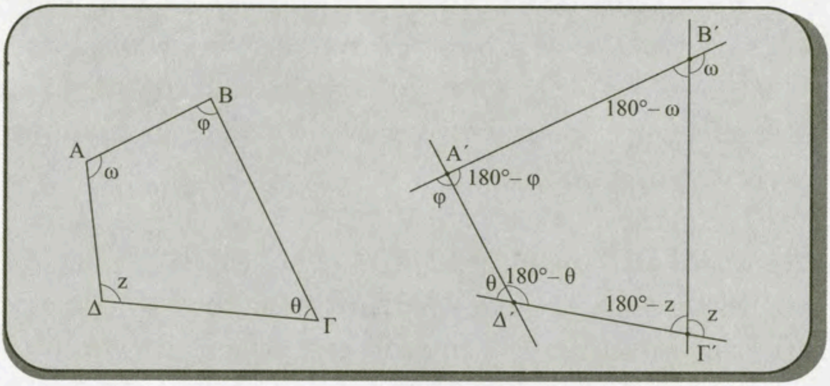
5. 6cm, 8cm και 10cm.

6. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΚΛ είναι όμοια, οπότε $\frac{ΚΛ}{ΒΓ} = \frac{ΑΛ}{ΑΒ} = \frac{ΑΚ}{ΑΓ}$.

7. ΑΒ//ΓΔ, γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΕΔ είναι όμοια.

Λύσεις των Δραστηριοτήτων - Εργασιών

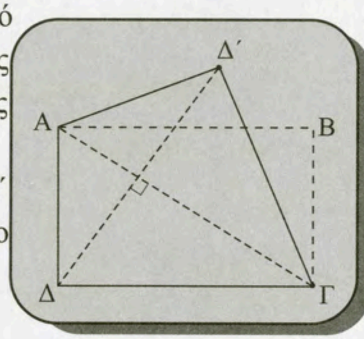
1η Δραστηριότητα Τέλος Κεφαλαίου



Είναι ΑΒ//Α΄Β΄, ΒΓ//Α΄Δ΄, ΔΓ//Δ΄Γ΄ και ΑΔ//Β΄Γ΄.

2η Δραστηριότητα Τέλος Κεφαλαίου

Αρκεί να θεωρήσουμε το συμμετρικό μίας από τις κορυφές του ορθογωνίου ως προς μία διαγώνιο, π.χ. της κορυφής Δ ως προς τη διαγώνιο ΑΓ.



Προκύπτει τότε το τετράπλευρο ΑΔΓΔ΄ που είναι της μορφής που θέλουμε να έχει το Α΄Β΄Γ΄Δ΄.

Εργασία

Η λύση είναι όμοια με την εφαρμογή 2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Μετρικές σχέσεις

Ενδεικτικός αριθμός ωρών διδασκαλίας: 9

Το κεφάλαιο αυτό αναφέρεται στις μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο και στον κύκλο. Με τον όρο μετρική σχέση εννοούμε μια σχέση μεταξύ μηκών ευθύγραμμων τμημάτων. Έτσι σε μία παράσταση της μορφής $2ΑΒ^2+ΑΓ^2-2ΑΒ\cdot ΑΓ$ *τα σύμβολα ΑΒ και ΑΓ παριστάνουν μήκη των αντίστοιχων ευθύγραμμων τμημάτων. Είναι χρήσιμο να τονισθεί στους μαθητές η* ***ομογένεια*** *των μετρικών σχέσεων, ώστε να μπορούν εύκολα να χαρακτηρίσουν, π.χ., ως λανθασμένη μια σχέση της μορφής* $α^2+β^2+2αβγ$*, όπου* $α,β,γ$ *μήκη πλευρών τριγώνου. Το κεφάλαιο αυτό μπορεί να χωριστεί σε τρεις διδακτικές ενότητες.*

Η πρώτη αναφέρεται στις μετρικές σχέσεις στο ορθογώνιο τρίγωνο, με βασικό συμπέρασμα το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Η ενότητα αυτή περιλαμβάνει και τις κατασκευές που στηρίζονται στο Πυθαγόρειο θεώρημα. Για τη σημασία του Πυθαγόρειου θεωρήματος είναι χρήσιμο να σχολιασθεί το ιστορικό σημείωμα της § 9.3.

Η δεύτερη αναφέρεται στη γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος, τις συνέπειές της, τα θεωρήματα των διαμέσων και τους βασικούς γεωμετρικούς τόπους της § 9.6. Επίσης είναι χρήσιμο να τονισθεί και να δοθεί ως συνέπεια της γενίκευσης του Πυθαγόρειου θεωρήματος ο Νόμος συνημιτόνων.

Η τρίτη ενότητα αναφέρεται στις μετρικές σχέσεις σε κύκλο. Οι εφαρμογές 1 και 2 της § 9.7 αποτελούν συμπλήρωμα της θεωρίας της παραγράφου.

Ενδεικτικός προγραμματισμός

1 διδακτική ώρα για σχέσεις στο ορθογώνιο τρίγωνο και Πυθαγόρειο θεώρημα.

1 διδακτική ώρα για εφαρμογές.

1 διδακτική ώρα για γεωμετρικές κατασκευές.

2 διδακτικές ώρες για γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος και εφαρμογές.

2 διδακτικές ώρες για θεωρήματα διαμέσων και γεωμετρικούς τόπους.

2 διδακτικές ώρες για μετρικές σχέσεις στον κύκλο.

Διδακτικοί στόχοι

- Να γνωρίζουν οι μαθητές και να μπορούν να αποδεικνύουν τις μετρικές σχέσεις στο ορθογώνιο τρίγωνο.
- Να μπορούν από γνωστές μετρικές σχέσεις που περιέχουν ένα άγνωστο τμήμα να το κατασκευάζουν.
- Να μπορούν να αποδεικνύουν μετρικές σχέσεις σε τυχαίο τρίγωνο.
- Να γνωρίζουν τις μετρικές σχέσεις στον κύκλο όταν έχουμε τέμνουσες ή τέμνουσα και εφαπτομένη και τις σχετικές εφαρμογές.

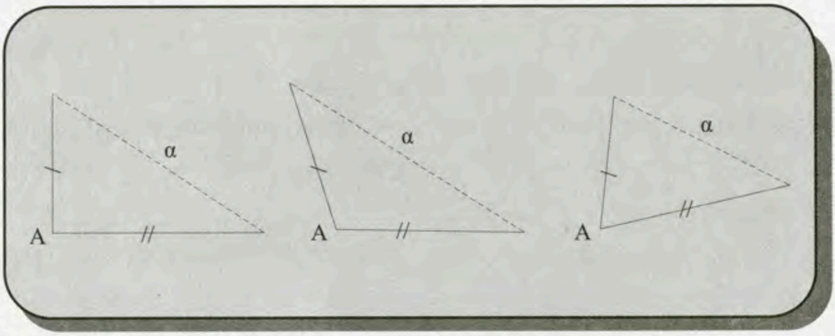
Οδηγίες για τη διδασκαλία - Διδακτικές προσεγγίσεις

Οι πρώτες μετρικές σχέσεις στο ορθογώνιο τρίγωνο προκύπτουν ως εφαρμογές των όμοιων τριγώνων. Άλλωστε από αυτές πολλές έχουν αποδειχθεί ως ασκήσεις στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Ο συνδυασμός σχέσεων με πράξεις μας οδηγεί σε άλλες σχέσεις. Έτσι με κατευθυνόμενη διδασκαλία οι μαθητές μπορούν με το Πυθαγόρειο θεώρημα να οδηγούνται στη νέα γνώση με περισσότερη αυτενέργεια. Αυτό γίνεται και στη γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος, αλλά και στον υπολογισμό του ύψους και στα θεωρήματα των διαμέσων. Παρακάτω δίνεται μια διδακτική προσέγγιση της γενίκευσης του Πυθαγόρειου θεωρήματος σύμφωνα με τα παραπάνω.

Για το ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$.

Αν χωρίς να αλλάξουν τα μήκη β και γ η γωνία $\hat{A}$ γίνει οξεία ή αμβλεία, τι συμβαίνει στην πλευρά α;



Η απάντηση θα είναι ότι θα γίνει αντίστοιχα μικρότερη ή μεγαλύτερη.

Άρα για το οξυγώνιο θα είναι $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ και για το αμβλυγώνιο

$$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2.$$

Για να αποκατασταθεί η ισότητα στις δύο περιπτώσεις, στην πρώτη πρέπει να αφαιρεθεί κάτι, από το β΄ μέλος της, και στη δεύτερη να προστεθεί κάτι, οπότε θα έχουμε αντίστοιχα:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \text{κάτι} \quad \text{και} \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \text{κάτι}.$$

Ο επόμενος προβληματισμός αφορά τον υπολογισμό του α^2 στις δύο περιπτώσεις. Αφού θέλουμε το τετράγωνο του α θα δημιουργήσουμε ορθογώνιο τρίγωνο κτλ.

Η ποσότητα που πρέπει να προστεθεί ή να αφαιρεθεί στις δύο περιπτώσεις για να αποκατασταθεί η ισότητα είναι φανερό ότι εξαρτάται από τη γωνία. Αυτό θα γίνει άμεσα φανερό από το νόμο των συνημιτόνων και μπορεί να γίνει το σχόλιο, αλλά και από τον τύπο που έχει την προβολή, γιατί η προβολή εξαρτάται απο το μέτρο της γωνίας.

Η ίδια μέθοδος εργασίας ακολουθείται για τα θεωρήματα των διαμέσων.

Για τις γεωμετρικές κατασκευές πρέπει να επισημανθεί ότι ισχύουν και τα αντίστροφα, π.χ αν $x^2 = \alpha\beta$, το x είναι το ύψος ορθογώνιου τριγώνου και α, β τα δύο τμήματα που ορίζει στην υποτείνουσα.

Για τις μετρικές σχέσεις στον κύκλο μετά την απόδειξη για τέμνουσα και εφαπτομένη αξίζει να επισημάνουμε ότι η εφαπτομένη είναι οριακή θέση της τέμνουσας. Τότε τα δύο τμήματα είναι ίσα και η εμφάνιση του τετραγώνου της εφαπτομένης ήταν αναμενόμενη. Μπορεί μάλιστα πρώτα να γίνει αυτό το σχόλιο και μετά να γίνει η απόδειξη του βιβλίου.

Μετά τον ορισμό της δύναμης σημείου ως προς κύκλο μπορεί να γίνει αναφορά στον τόπο των σημείων που έχουν την ίδια δύναμη ως προς δύο κύκλους (ριζικός άξονας). Άλλωστε σε τεμνόμενους η σε εφαπτόμενους κύκλους διαπιστώνεται άμεσα.

Η χρυσή τομή ειναι πηγή θεμάτων συνθετικών/δημιουργικών εργασιών.

Σχέδιο μαθήματος με φύλλο εργασίας

Διδακτική ενότητα: Πυθαγόρειο θεώρημα.

Στόχοι: Να μπορούν οι μαθητές:

i) να κατασκευάζουν τις ορθές προβολές σημείων και ευθύγραμμων τμημάτων,

ii) να αποδεικνύουν και να εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο θεώρημα, καθώς και τα άλλα σχετικά θεωρήματα.

Μέθοδος: Καθοδηγούμενη μάθηση με στοιχεία ανακάλυψης.

Προπαρασκευή - Κινητοποίηση: Θα γίνει με ερωτήσεις σχετικές με την κάθετο που φέρουμε από σημείο εκτός ευθείας ή σε σημείο ευθείας.

Παρουσίαση: Θα γίνει με φύλλο εργασίας.

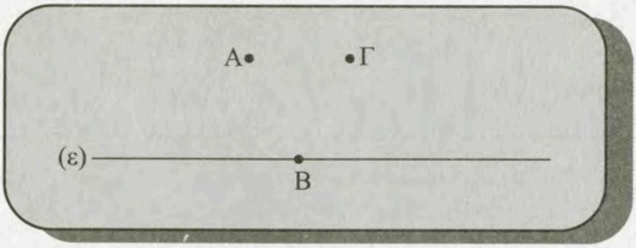
Εμπέδωση: Θα γίνει με τις εφαρμογές και τις ασκήσεις που περιέχει το φύλλο εργασίας.

Εργασία για το σπίτι: 3 ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο.

Προαιρετική άσκηση: Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ, ώστε $\hat{A} = \hat{B} = 90^o$. Φέρουμε τις διαγωνίους του ΑΓ, ΒΔ και ενώνουμε τα μέσα τους Ε και Ζ. Να αποδείξετε ότι $ΓΔ^2=AB^2+4EZ^2$.

Φύλλο Εργασίας

1. Έχουμε το παρακάτω σχήμα:

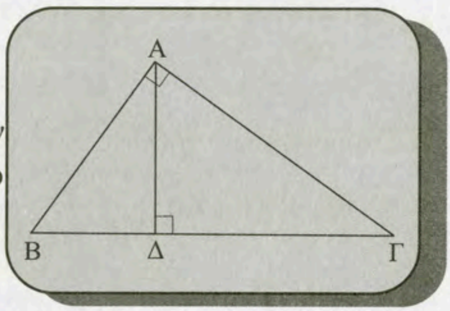


i) Να φέρετε από το Α την κάθετη ΑΑ΄ στην ευθεία ε (Α΄ σημείο της ε). Πώς ονομάζεται το σημείο Α΄;

ii) Να κάνετε το ίδιο με τα σημεία Β και Γ.

iii) Να φέρετε το ευθύγραμμο τμήμα Β′ Γ′, όπου Β′ η προβολή του Β και Γ′ η προβολή του Γ.

2. Έχουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$).



i) Να βρείτε τις προβολές των κάθετων πλευρών ΑΒ,ΑΓ πάνω στην ευθεία ΒΓ.

ii) Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΑ είναι όμοια.

iii) Να υπολογίσετε το ΑΒ^2 ως συνάρτηση των ΒΔ και ΒΓ και να διατυπώσετε το αποτέλεσμα στη μορφή θεωρήματος:

Θεώρημα ....

....

iv) Αν στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ $=90^o$) είναι ΑΒ=6cm, ΒΓ=10cm, να βρείτε το ΒΔ.

v) Μπορείτε να βρείτε και άλλα ζεύγη όμοιων τριγώνων στο σχήμα; Υπολογίστε τα ΑΒ^2 και ΑΔ^2 και διατυπώστε το αποτέλεσμα σε μορφή θεωρήματος:

Θεώρημα ....

....

vi) Να βρείτε το λόγο $\frac{AB^2}{A\Gamma^2}$ και να διατυπώσετε το αποτέλεσμα ως πόρισμα.

Πόρισμα..

....

vii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $AB^2 + A\Gamma^2$ και να διατυπώσετε το αντίστοιχο θεώρημα.

Θεώρημα..

....

viii) Στο παραπάνω τρίγωνο είναι ΑΒ=15cm, ΑΓ=20cm. Να βρείτε τη ΒΓ.

3. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) το ΑΔ είναι ύψος.

Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{A\Gamma^2} = \frac{1}{A\Delta^2}$.

Αξιολόγηση και ενδεικτικά κριτήρια

Η αξιολόγηση πρέπει όπως πάντα να γίνεται σε όλους τους διδακτικούς στόχους από τους πιο άμεσους μέχρι τους τελικούς. Για το λόγο αυτό και οι ερωτήσεις είναι διαφορετικών επιπέδων δυσκολίας.

Ερωτήσεις κατανόησης και εμπέδωσης

1. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει πλευρές x, x+2, x-2. Να υπολογισθούν οι πλευρές του.

2. Η διάμεσος ΑΜ ορθογώνιου τριγώνου ισούται με μία κάθετη πλευρά που έχει μήκος α. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου.

3. Ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο έχει υποτείνουσα με μήκος α. Να υπολογίσετε τις κάθετες πλευρές του.

4. Τριγώνου ΑΒΓ είναι α=12, β= 20. Αν η $\hat{B}$ είναι αμβλεία, πόσο μπορεί να είναι το μήκος της γ;

5. Στον άξονα των πραγματικών αριθμών που είναι γνωστή η θέση του 1, να προσδιορίσετε τη θέση του $\sqrt{5}$.

6. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = 1 + \sqrt{3}$, $\gamma = 2$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$.

7. Δύο χορδές κύκλου τέμνονται και τα μήκη των τριών τμημάτων είναι 6, 10, 12. Πόσο μπορεί να είναι το τέταρτο τμήμα;

8. Μία κάθετη πλευρά ορθογώνιου τριγώνου είναι τριπλάσια της άλλης. Ποιος ειναι ο λόγος των προβολών τους στην υποτείνουσα;

9. Δίνονται ευθύγραμμα τμήματα α και β. Να κατασκευασθεί ευθύγραμμο τμήμα x τέτοιο, ώστε $x^2 = \alpha^2 + \alpha\beta$.

10. Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου είναι: 2α, 3α, 4α.

i) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη πλευρά.

ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους στη ίδια πλευρά.

Για την αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών να εφαρμόζουν τις γνωστές μετρικές σχέσεις για την απόδειξη άλλων, υπάρχουν οι ασκήσεις του βιβλίου που χαρακτηρίζονται ως αποδεικτικές καθώς και τα σύνθετα θέματα.

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$= 90°) είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Να βρείτε το λόγο $\dfrac{\beta}{\gamma}$.

2. Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι $\alpha=\kappa^2+\lambda^2$, $\beta=2\kappa\lambda$, $\gamma= \kappa^2-\lambda^2$, όπου κ και λ θετικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

3. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει ότι $2\mu_\alpha^2 \geq \beta\gamma$.

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta^2+\gamma^2=2\alpha\mu_\alpha$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$.

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$). Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά ΓΔ=ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $B\Delta^2 = 2B\Gamma \cdot A\Delta$.

3. Στην υποτείνουσα ΒΓ ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε, ώστε ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ. Αν ΒΓ = α, να αποδείξετε ότι

$$A\Delta^2 + AE^2 = \frac{5}{9}\alpha^2.$$

Απαντήσεις των ερωτήσεων κατανόησης

§ 9.1 – 9.2

1. 5

2. γ

3. β, γιατί $3 \cdot 12 = 36 = 9+12+15$.

4. $x = \frac{2\sqrt{21}}{5}$, $y = \sqrt{21}$.

§ 9.4

1. i) $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2AB \cdot A\Delta$

ii) $B\Gamma^2 = AB^2+A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot AE$

2. i) $\hat{B} > 90°$

ii) $\hat{A} = 90°$

iii) $\hat{A} > 90°$

3. «μεγαλύτερη» – $\beta^2 > \alpha^2 + \gamma^2$

4. $\alpha^2 = \beta^2 + \beta^2 - 2\beta \cdot \beta \cdot \sigma\upsilon\nu 120°$ ή $\alpha^2 = 3\beta^2$.

§ 9.5 – 9.6

1. $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2BM^2 \quad \left(BM = \frac{\alpha}{2}\right)$

2. i) $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

ii) $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2MO^2 + \dfrac{\Gamma\Delta^2}{2}$

$MA^2 + MB^2 = M\Gamma^2 + M\Delta^2$, γιατί $AB = \Gamma\Delta = 2R$.

3. γ

§ 9.7

1. i) $x = 1$

ii) $y = 8$

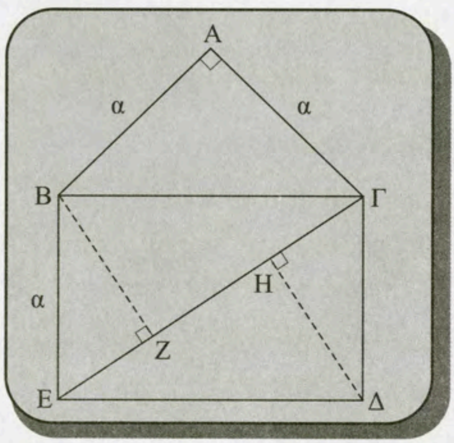
iii) $x = 5$

2. $-R^2$

3. $R = 2$

Λύσεις των Δραστηριοτήτων - Εργασιών

1η Δραστηριότητα, (τέλος κεφαλαίου)

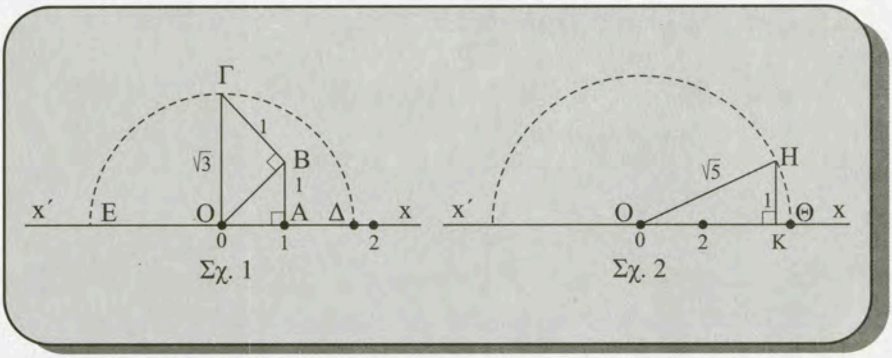


Τα τμήματα ΕΖ, ΖΗ και ΗΓ είναι ίσα. Πράγματι από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΓ προκύπτουν αντίστοιχα ότι $B\Gamma = \alpha\sqrt{2}$ και $E\Gamma = \alpha\sqrt{3}$. Επίσης από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΓ έχουμε ότι

$BE^2 = E\Gamma \cdot EZ$ ή $\alpha^2 = \alpha\sqrt{3} \cdot EZ$ ή $EZ = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{3}$.

Όμοια από το τρίγωνο ΔΕΓ προκύπτει ότι $H\Gamma = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{3}$, οπότε και $ZH = E\Gamma - EZ - H\Gamma = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{3}$. Άρα $EZ = ZH = H\Gamma = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{3}$.

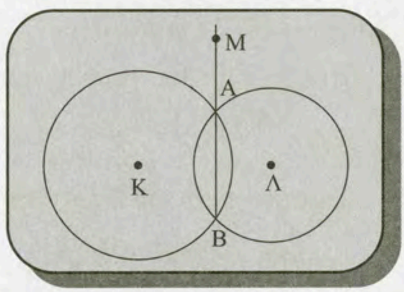
2η Δραστηριότητα (τέλος Κεφαλαίου)



• Για τον προσδιορισμό της θέσης του $\sqrt{3}$, κατασκευάζουμε αρχικά (σχ. 1) το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΟΒ με ΟΑ = ΑΒ = 1, οπότε ΟΒ = $\sqrt{2}$. Στη συνέχεια φέρουμε ΒΓ$\perp$ΟΒ, ώστε ΒΓ = 1, οπότε ΟΓ = $\sqrt{3}$. Αν γράψουμε τον κύκλο (Ο, ΟΓ), τα σημεία τομής του Δ και Ε με τον άξονα x΄x είναι αντίστοιχα οι θέσεις των $\sqrt{3}$ και $-\sqrt{3}$.

• Για τον προσδιορισμό της θέσης του $\sqrt{5}$, κατασκευάζουμε (σχ.2) το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΟΗ με ΟΚ = 2 και ΚΗ = 1. Τότε ΟΗ = $\sqrt{5}$, οπότε το σημείο τομής Θ του κύκλου (Ο, ΟΗ) με τον άξονα είναι η θέση του $\sqrt{5}$.

Εργασία (τέλος Κεφαλαίου)



i) Φέρουμε την κοινή χορδή ΑΒ. Αν Μ σημείο στην προέκταση της ΑΒ έχουμε:

$ΜΑ \cdot ΜΒ = ΜΚ^2 - R^2 = Δ^{Μ}_{(Κ,R)}$ και

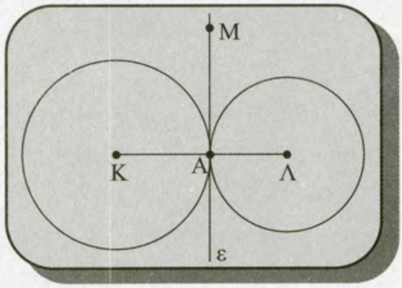
$ΜΑ \cdot ΜΒ = ΜΛ^2 - ρ^2 = Δ^{Μ}_{(Λ,ρ)}$.

ii) Φέρουμε την κοινή εφαπτομένη ε στο σημείο επαφής. Αν Μ σημείο της ε έχουμε:

$MA^2 = MK^2 - R^2 = \Delta^{M}_{(K,R)}$ και

$MA^2 = M\Lambda^2 - \rho^2 = \Delta^{M}_{(\Lambda,\rho)}$.

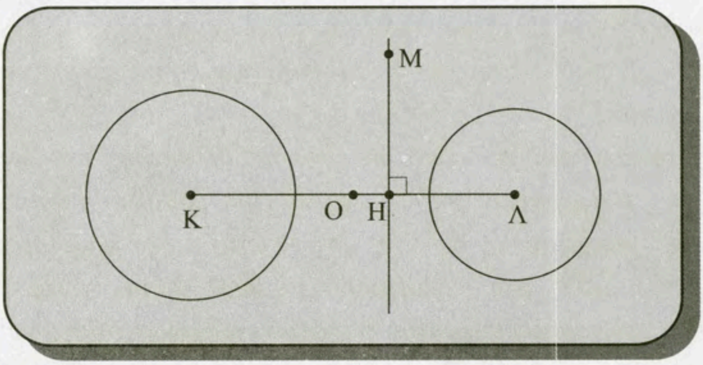
Όμοια αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.



iii) Έστω R>ρ.

Πρέπει $\Delta^{M}_{(K,R)} = \Delta^{M}_{(\Lambda,\rho)} \Leftrightarrow MK^2 - R^2 = M\Lambda^2 - \rho^2 \Leftrightarrow MK^2 - M\Lambda^2 = R^2 - \rho^2$.

Επομένως, σύμφωνα με το πρόβλημα 2 της § 9.6, το M ανήκει σε ευθεία ε κάθετη στη διάκεντρο ΚΛ στο σημείο Η, ώστε $OH = \dfrac{R^2 - \rho^2}{2K\Lambda}$, όπου Ο είναι το μέσο της ΚΛ.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Εμβαδά

Ενδεικτικός αριθμός ωρών διδασκαλίας: 7

Η έννοια του εμβαδού, όπως αναφέρεται και στην § 10.2, έχει κοινές ιδιότητες με την έννοια του μήκους ευθύγραμμου τμήματος, του μέτρου τόξου ή γωνίας. Η παρατήρηση αυτή είναι χρήσιμο να τονιστεί στους μαθητές, ώστε να γίνει κατανοητό ότι η έννοια της μέτρησης είναι η ίδια και απλά αλλάζει το είδος και η φύση των μετρούμενων μεγεθών. Άλλωστε και η έννοια του μέτρου ενός συνόλου αποτελεί γενίκευση της έννοιας του μήκους, του εμβαδού ή του όγκου που θα γνωρίσουμε αργότερα και έχει ανάλογες ιδιότητες.

Η ύλη του κεφαλαίου χωρίζεται σε τέσσερις διδακτικές ενότητες.

Η πρώτη αναφέρεται στην έννοια του εμβαδού των βασικών γεωμετρικών σχημάτων. Η δεύτερη αναφέρεται ειδικότερα στο εμβαδόν τριγώνου και η τρίτη στη σχέση των εμβαδών όμοιων πολυγώνων. Η τελευταία ενότητα αναφέρεται στον τετραγωνισμό ενός πολυγώνου.

Ενδεικτικός προγραμματισμός

2 διδακτικές ώρες για πολυγωνικά χωρία, εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος και το εμβαδόν των βασικών σχημάτων (§ 10.1, 10.2, 10.3)

1 διδακτική ώρα για εφαρμογές.

1 διδακτική ώρα για άλλους τύπους εμβαδού του τριγώνου (§ 10.4).

2 διδακτικές ώρες για εμβαδόν και ομοιότητα, εφαρμογές (§ 10.5).

1 διδακτική ώρα για τετραγωνισμό σχημάτων (§ 10.6).

Διδακτικοί στόχοι

- Να γνωρίζουν οι μαθητές την έννοια του εμβαδού.
- Να μπορούν να υπολογίζουν το εμβαδόν των βασικών σχημάτων.
- Να διακρίνουν τα διαφορετικά και ισοδύναμα ως προς το εμβαδόν σχήματα.
- Να μπορούν να μετασχηματίζουν ένα σχήμα σε άλλο ισοδύναμο και να τετραγωνίζουν ένα πολύγωνο.
- Να γνωρίζουν τη σχέση των εμβαδών όμοιων σχημάτων με το λόγο ομοιότητας.

Οδηγίες για τη διδασκαλία - Διδακτικές προσεγγίσεις

Η έννοια του εμβαδού ειναι εμπειρικά γνωστή και αναφέρεται σε κάποια έκταση που μπορεί να μετρηθεί. Η μέτρηση αυτή γίνεται με σύγκριση με κάποια άλλη έκταση που τη θεωρούμε ως μονάδα. Ετσι καθίσταται φανερή η αναγκαιότητα της μονάδας.

Στη συνέχεια διατυπώνουμε τις βασικές αρχές (αξιώματα) που ισχύουν:

1. Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.

2. Το εμβαδόν ενός πολυγωνικού χωρίου ή μιας πολυγωνικής επιφάνειας ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των μερών της στα οποία χωρίζεται.

3. Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 1 μ είναι 1 τ.μ.

Το αντίστροφο της πρώτης πρότασης δεν ισχύει. Δίνεται ο ορισμός των ισοδύναμων σχημάτων. Για παράδειγμα με 4 τετραγωνικές μονάδες μπορούμε να έχουμε διαφορετικά σχήματα που να έχουν εμβαδόν 4 και να μην είναι ίσα (εφαρμόσιμα).

Συνέπεια των παραπάνω είναι ότι:

Αν μία επιφάνεια περιέχεται σε άλλη, τότε έχει εμβαδόν μικρότερο αυτής.

Εδώ πριν προχωρήσουμε στους τύπους που μας δίνουν το εμβαδόν μπορούμε να δώσουμε αρκετά παραδείγματα ισοδύναμων σχημάτων, όπως παραλληλόγραμμο και ορθογώνιο, τρίγωνο και ισοδύναμο τραπέζιο, τραπέζιο και ισοδύναμο τρίγωνο. Όλα αυτά αποτελούνται από μέρη που είναι ίσα (άρα ισεμβαδικά) ένα προς ένα. Στη συνέχεια αποδεικνύονται οι τύποι των εμβαδών των βασικών σχημάτων.

Παραδείγματα

- Η διάμεσος τριγώνου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα.
- Αν η κορυφή τριγώνου κινείται παράλληλα στη βάση, τα τρίγωνα που προκύπτουν είναι ισοδύναμα.
- Με υπολογισμό των εμβαδών αποδεικνύεται και το Πυθαγόρειο θεώρημα (ιστορικό σημείωμα).

Για το εμβαδόν πολυγώνου εφαρμόζεται το αξίωμα 2 που αναφέρθηκε παραπάνω. Δηλαδή το χωρίζουμε κατάλληλα σε χωρία των οποίων μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν.

Αξιολόγηση και ενδεικτικά κριτήρια

Για τον έλεγχο της κατανόησης της έννοιας του εμβαδού, της μέτρησης και των ισοδύναμων σχημάτων δίνονται παρακάτω ενδεικτικά ερωτήματα.

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Έχουμε ένα αρθρωτό παραλληλόγραμο (μεταβάλλονται οι γωνίες και μένουν σταθερά τα μήκη των πλευρών). Πότε το εμβαδόν του γίνεται μέγιστο;

2. Ένας ρόμβος και ένα τετράγωνο έχουν την ίδια περίμετρο. Ποιο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

3. Σε ορθογώνιο αυξάνουμε τη βάση και ελαττώνουμε το ύψος κατά την ίδια ποσότητα. Το εμβαδόν θα μεταβληθεί;

4. Τετράγωνο και ισόπλευρο τρίγωνο έχουν την ίδια περίμετρο. Ποιο έχει μεγαλύτερο εμβαδόν;

5. Σε τρίγωνο διπλασιάζουμε το ύψος και τριπλασιάζουμε τη βάση. Πώς θα μεταβληθεί το εμβαδόν;
6. Σε κυρτό τετράπλευρο φέρουμε τις διαγωνίους και ενώνουμε τα μέσα των τεσσάρων τμημάτων τους στα οποία χωρίζονται από το σημείο τομής τους.. Σχηματίζεται ένα νέο τετράπλευρο. Να βρείτε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των εμβαδών αυτού και του αρχικού;
7. Το γινόμενο των δύο πλευρών τριγώνου είναι διπλάσιο του εμβαδού. Πόσο είναι το μέτρο της περιεχόμενης γωνίας τους;
8. Αμβλυγώνιο και οξυγώνιο τρίγωνο έχουν ίσες μία προς μία τις πλευρές της οξείας και αμβλείας γωνίας και επιπλέον ίσα εμβαδά. Ποια η σχέση μεταξύ της αμβλείας και οξείας γωνίας ;
9. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ειναι $\beta = 3\gamma$. Τι σχέση έχουν τα ύψη υ_γ και υ_β;
10. Σε τρίγωνο ΑΒΓ να προσδιορίσετε εσωτερικό του σημείο Ο, ώστε το εμβαδόν του ΟΑΒ να είναι το $\frac{1}{3}$ του ΑΒΓ και του ΟΒΓ το $\frac{1}{2}$ του ΑΒΓ.
11. Οι 3 διάμεσοι ενός τριγώνου το χωρίζουν σε 6 ισοδύναμα σχήματα. Να αιτιολογήσετε την πρόταση.

Η εμπέδωση γίνεται με υπολογιστικές ασκήσεις που αναφέρονται στον υπολογισμό των εμβαδών ή σε υπολογισμούς μέσω ισοδύναμων σχημάτων ή κατασκευών. Ενδεικτικά παραδείγματα είναι τα παρακάτω.

Υπολογιστικές Ασκήσεις

1. Να υπολογισθεί η πλευρά ισόπλευρου τριγώνου, αν αριθμητικά η περίμετρος ισούται με το εμβαδόν.
2. Στη μια πλευρά παραλληλογράμου να προσδιορισθεί σημείο, ώστε αν ενωθεί με μια απέναντι κορυφή να χωρίζει το παραλληλόγραμο σε δύο μέρη που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου.
3. Να κατασκευασθεί τετράγωνο με εμβαδόν διπλάσιο ενός δοσμένου τετραγώνου.
4. Ένα ισοσκελές τραπέζιο έχει τη μία βάση ίση με τις μη παράλληλες πλευρές του και μία γωνία 120^o. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του.
5. Τριγώνου ΑΒΓ είναι γνωστά οι πλευρές β,γ και η γωνία $\hat{A} = 60^o$. Να υπολογίσετε τα ύψη από τις κορυφές Β και Γ.

6. Οι βάσεις ενός τραπεζίου έχουν μήκη α και 3α. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των δύο τραπεζίων που ορίζει η διάμεσος.

7. Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) ειναι ισοδύναμο με τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ με Α΄Β΄=4, Α΄Γ΄=9 και $\hat{A}+\hat{A}'=180^o$. Να υπολογισθεί το μήκος της πλευράς ΑΒ του ισοσκελούς.

8. Παραλληλόγραμο ΑΒΓΔ έχει εμβαδόν 30. Σημείο Σ βρίσκεται στο εσωτερικό του και πάνω στη μεσοπαράλληλο των ΑΒ και ΓΔ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΣΑΒ.

Αποδεικτικές ασκήσεις που υπάρχουν στο βιβλίο καθώς και σύνθετα θέματα, που μάλιστα δίνονται κατά παραγράφους, προσφέρονται για αξιολόγηση των τελικών σκοπών της διδασκαλίας.

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τμήματα ΑΔ=$\frac{1}{2}$ΑΒ και ΑΕ= $\frac{1}{3}$ ΑΓ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.

2. Αν Σ σημείο μιας πλευράς παραλληλογράμου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι (ΣΑΓ)+(ΣΒΔ)=(ΑΒΓ).

3. Στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ, πλευράς α, παίρνουμε σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε ΖΓ=ΗΔ=$\frac{\alpha}{4}$.

i) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΖ και ΒΗ είναι κάθετα.

ii) Αν Κ το σημείο τομής των ΑΖ και ΒΗ, να υπολογισθούν τα μήκη των ΑΚ, ΑΗ, ΚΗ.

iii) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΚΗΔ.

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 28 και διαγώνιο 10. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

2. Σε τραπέζιο να αποδείξετε ότι το τρίγωνο, που έχει πλευρά μία από τις μη παράλληλες πλευρές του και κορυφή το μέσο της απέναντι πλευράς, έχει εμβαδόν το $\frac{1}{2}$ του τραπεζίου.

3. Δίνεται κύκλος Ο και δύο κάθετες χορδές ΑΒ και ΓΔ. Να αποδείξετε ότι (ΒΟΔ)=(ΑΟΓ).

Απαντήσεις των ερωτήσεων κατανόησης

§ 10.1 – 10.3

2. Ε = 16

3. x = 6

4. $υ_α > υ_β$

5. Ισούται με 10.

6. Έχασε γιατί ο τετραγωνικός αγρός είχε εμβαδόν $3600m^2$, ενώ ο ορθογώνιος έχει $3200m^2$.

§ 10.4

1. Λαμβάνουμε υπόψη ότι $0 < ημA \leq 1$. Η ισότητα ισχύει όταν $\hat{A} = 90°$.

2. Από τον τύπο Ε = τρ προκύπτει τ = 6.

§ 10.5

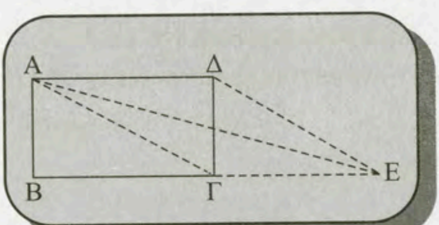
1. Γ

2. Οι δοσμένοι ρόμβοι είναι όμοιοι, οπότε $\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α'Β'Γ'Δ')} = \frac{16}{25}$.

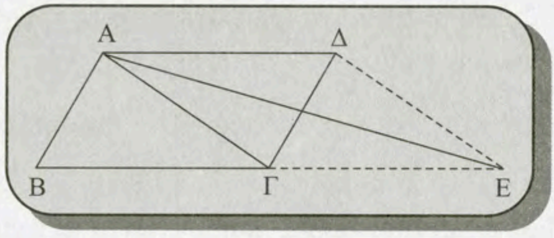
3. Αν x είναι το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς, θα είναι $x^2 = 36$ και $x = 6$.

§ 10.6

2. Η παράλληλη από το Δ προς τη διαγώνιο ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ε. Τότε (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΕ).



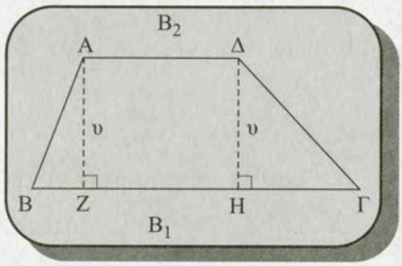
3. Από την κορυφή Δ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε παράλληλη προς τη διαγώνιο ΑΓ που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ε. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοδύναμο προς το παραλληλόγραμο ΑΒΓΔ.



4. Το τραπέζιο, με τη συνήθη κατασκευή, μετασχηματίζεται σε ισοδύναμο τρίγωνο το οποίο στη συνέχεια μετασχηματίζεται σε ισοδύναμο τετράγωνο.

Λύσεις των Δραστηριοτήτων - Εργασιών

1η Δραστηριότητα § 10.3



Έστω ΒΓ=B_1 και ΑΔ=B_2. Είναι

ΗΓ=ΒΓ– ΒΖ – ΖΗ, οπότε:

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΖ) + (ΑΖΗΔ) + (ΔΗΓ)$$

$$= \frac{1}{2}ΒΖ\cdot υ + ΖΗ\cdot υ + \frac{1}{2}ΗΓ\cdot υ$$

$$= \frac{1}{2}ΒΖ\cdot υ + ΖΗ\cdot υ + \frac{1}{2}(ΒΓ–ΒΖ – ΖΗ)\cdot υ$$

$$= \frac{1}{2}(ΒΖ+2ΖΗ+ΒΓ– ΒΖ – ΖΗ)\cdot υ$$

$$= \frac{1}{2}(ΒΓ + ΖΗ)\cdot υ = \frac{1}{2}(B_1+B_2)\cdot υ$$

2η Δραστηριότητα § 10.3

Αρκεί να χωρίσουμε την πλευρά ΒΓ σε τρία ίσα μέρη.

Μέτρηση κύκλου

Ενδεικτικός αριθμός ωρών διδασκαλίας: 8

Το κεφάλαιο αυτό αναφέρεται στη μέτρηση του κύκλου. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται τα κανονικά πολύγωνα.

Έτσι το κεφάλαιο χωρίζεται στις εξής διδακτικές ενότητες: κανονικά πολύγωνα και ιδιότητές τους, εγγραφή των βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο, μήκος κύκλου και, τόξου, και τέλος εμβαδόν του κύκλου.

Ενδεικτικός προγραμματισμός

2 διδακτικές ώρα για τον ορισμό του κανονικού πολυγώνου, τα στοιχεία του και τις ιδιότητές του. (§§11.1 και 11.2)

2 διδακτικές ώρες για την εγγραφή των βασικών κανονικών πολυγώνων στον κύκλο και υπολογισμό των στοιχείων τους. (§ 11.3)

1 διδακτική ώρα για το μήκος κύκλου και τόξου. (§§ 11.4 και 11.5)

1 διδακτική ώρα για εμβαδόν κύκλου, κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος. (§§ 11.6, 11.7 και 11.8)

2 διδακτικές ώρες για εφαρμογές.

Διδακτικοί στόχοι

- Να γνωρίζουν οι μαθητές πότε ένα πολύγωνο είναι κανονικό, τα στοιχεία και τις ιδιότητές του.
- Για τα κανονικά πολύγωνα που εγγράφονται σε κύκλο, να μπορούν να υπολογίζουν την πλευρά, το απόστημα και το εμβαδόν από την ακτίνα του κύκλου.
- Να μπορούν από την ακτίνα του κύκλου να υπολογίζουν το εμβαδόν του, το μήκος του, καθώς και το εμβαδόν κυκλικού τομέα

και κυκλικού τμήματος.

- Να μπορούν να υπολογίζουν το εμβαδόν καμπυλόγραμμων σχημάτων που προκύπτουν από κυκλικές επιφάνειες.

Οδηγίες για τη διδασκαλία - Διδακτικές προσεγγίσεις

Αν ζητήσουμε απο τους μαθητές κυρτά ευθύγραμμα σχήματα που έχουν τις πλευρές και τις γωνίες τους ίσες, έχουμε το ισόπλευρο τρίγωνο και το τετράγωνο.

Αν αναζητήσουμε αυτά τα χαρακτηριστικά και σε κυρτά πολύγωνα με περισσότερες πλευρές έχουμε τα κανονικά πολύγωνα.

Επειδή οι γωνίες τους είναι ίσες μπορούμε αμέσως να τις υπολογίσουμε.

Για την κατασκευή κανονικού πολυγώνου θα επισημανθεί οτι αν χωρίσουμε έναν κύκλο σε ίσα μέρη, τότε τα σημεία διαίρεσής του είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου.

Ενδιαφέρον έχει το αντίστροφο θεώρημα, όπου θα ορισθεί το κέντρο του πολυγώνου καθώς και η κεντρική γωνία.

Το θεώρημα συμπληρώνεται με το περιγεγραμμένο κανονικό πολύγωνο. Ακολουθεί η εγγραφή σε κύκλο των γνωστών πολυγώνων και ο υπολογισμός των στοιχείων τους.

Εδώ μπορεί να γίνει αναφορά στη σχέση πλευράς εγγεγραμμένου με διπλάσιο αριθμό πλευρών και του αρχικού. Και φυσικά στη σχέση που συνδέει τα στοιχεία εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου λόγω ομοιότητας.

Επισημαίνεται ότι αν εγγραφεί ν-γωνο, τότε μπορεί να εγγραφεί και το 2ν-γωνο και από την ακολουθία αυτών των πολυγώνων ορίζουμε το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου. Το ίδιο συμβαίνει με τα περιγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα.

Από το λόγο των περιμέτρων δύο πολυγώνων που έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών (όμοια), ο οποίος ισούται με το λόγο των πλευρών, των αποστημάτων και των ακτίνων, προκύπτει διαισθητικά ότι ο λόγος δύο κύκλων που είναι όρια εγγεγραμμένων θα ισούται με το λόγο των ακτίνων τους. Έτσι καταλήγουμε ότι ο λόγος L/R ή L/2R ειναι σταθερός, και προκύπτει το μήκος του κύκλου.

Για το εμβαδόν των καμπυλόγραμμων σχημάτων εφαρμόζονται οι προτάσεις που ισχύουν για τα επίπεδα χωρία που προκύπτουν από άθροισμα ή διαφορά γνωστών εμβαδών.

Στις εφαρμογές αξίζει να γίνει αναφορά και στη διακόσμηση που γίνεται με τα κανονικά πολύγωνα.

Πρώτα, μπορεί να αποδειχθεί η κλασική σχέση που αναφέρεται στο στρώσιμο δαπέδου με πλακίδια σχήματος κανονικών πολυγώνων με πλήθος πλευρών λ,μ,ν, όπου $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=\frac{1}{2}$.

Έπειτα μπορεί να ζητηθεί να αποδειχθεί ότι αν ξεκινήσουμε με δύο τετράγωνα, ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα κανονικό εξάγωνο, μπορούμε να στρώσουμε το δάπεδο.

Ως άλλη δραστηριότητα δίνεται οκτάγωνο και εξωτερικά στις πλευρές του κατασκευάζουμε τετράγωνα. Πώς θα συνεχίσουμε ώστε να καλύψουμε μια επιφάνεια;

Σχέδιο μαθήματος με φύλλο Εργασίας

Διδακτική ενότητα: Κανονικά πολύγωνα.

Υποενότητα: Εγγραφή κανονικών πολυγώνων σε κύκλο.

Στόχοι: Οι μαθητές να μπορούν:

i) να κατασκευάζουν τετράγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο και να υπολογίζουν την πλευρά λ_4 και το απόστημα α_4 ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου,

ii) να κατασκευάζουν κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο και να υπολογίζουν την πλευρά λ_6 και το απόστημα α_6 ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου,

iii) να κατασκευάζουν ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο και να υπολογίζουν την πλευρά λ_3 και το απόστημα α_3 ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

Μέθοδος: Μεικτή (ερωτήσεις - καθοδήγηση - μάθηση).

Προπαρασκευή - Κινητοποίηση: Με ερωτήσεις θα γίνει προσπάθεια να θυμηθούν οι μαθητές τα προηγούμενα θεωρήματα που αφορούν τα κανονικά πολύγωνα και κυρίως το θεώρημα που αναφέρεται στο χωρισμό του κύκλου σε ν ίσα τόξα με συνέπεια την κατασκευή κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σε αυτόν. (Παρατήρηση σελίδας 236).

Παρουσίαση: Θα δοθεί κύκλος (O,R), θα ζητηθεί να χωρισθεί σε 2 ίσα μέρη και μετά σε 4 ίσα μέρη και να κατασκευασθεί το εγγεγραμμένο τετράγωνο. Στη συνέχεια, θα ζητηθεί να υπολογισθούν η πλευρά λ_4 και το απόστημα α_4. Θα γίνει προσπάθεια να ανακαλύψουν και τον τρόπο εγγραφής κανονικών πολυγώνων με αριθμό πλευρών 2^ν, όπου ν φυσικός αριθμός και $\nu>2$. Όμοια θα εργασθούμε για το κανονικό εξάγωνο και το ισόπλευρο τρίγωνο, καθώς και για τα κανονικά πολύγωνα που έχουν αριθμό πλευρών $3 \cdot 2^\nu$, $\nu = 0,1,2, \ldots$.

Εμπέδωση: Θα γίνει για κάθε στόχο με τις παρακάτω ασκήσεις:

1. Να βρεθεί το εμβαδόν ενός τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R) ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

2. Σε έναν κύκλο ακτίνας R παίρνουμε δύο παράλληλες χορδές $AB=\lambda_4$ και $\Delta\Gamma=\lambda_6$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

3. Αν ένα κανονικό εξάγωνο, ένα τετράγωνο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο (O,R) να αποδείξετε ότι $\lambda_3^2 = \lambda_2^4 \;\; + \lambda_6^2$.

Εργασία για το σπίτι:

Άσκηση

Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) του οποίου η πλευρά ΑΒ είναι ίση με την πλευρά του εγγεγραμμένου, στον κύκλο αυτό, τετραγώνου και η ΑΓ είναι ίση με την πλευρά του εγγεγραμμένου, στον κύκλο αυτό, ισόπλευρου τριγώνου. Να υπολογισθούν:

i) οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ,

ii) το ύψος ΑΗ,

iii) η πλευρά του ΒΓ,

iv) το εμβαδόν του.

Αξιολόγηση και ενδεικτικά κριτήρια

Η αξιολόγηση για τον έλεγχο της κατανόησης των βασικών στοιχείων και της εμπέδωσής τους γίνεται με ερωτήσεις που αναφέρονται σε υπολογισμούς γωνιών, αποστήματος, εμβαδού κανονικών πολυγώνων κτλ. Δίνονται και εδώ υπολογιστικές και φυσικά αποδεικτικές ασκήσεις και σύνθετα θέματα

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. Ο λόγος των εμβαδών δύο κανονικών πολυγώνων με πλήθος πλευρών ν είναι 9.

i) Ποιος ο λόγος των περιμέτρων τους;

ii) Ποιος είναι ο λόγος των αποστημάτων τους;

2. Η διαφορά των εμβαδών ισόπλευρου τριγώνου και τετραγώνου εγγεγραμμένων σε κύκλο ακτίνας ρ είναι 12. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου.

3. Σε κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ να αποδείξετε ότι:

i) κάθε διαγώνιος το χωρίζει σε ισοσκελές τραπέζιο και ισοσκελές τρίγωνο,

ii) η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ ειναι κάθετη στην πλευρά ΑΕ,

iii) αν Η το σημείο τομής της ΑΓ με την ΒΔ, τότε $\mathrm{AH}^2 = \mathrm{A}\Gamma \cdot \mathrm{H}\Gamma$.

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. Η πλευρά περιγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου είναι 16. Να υπολογίσετε:

i) την ακτίνα του κύκλου,

ii) το εμβαδόν του εγγεγραμμένου τετραγώνου.

2. Τρεις ίσοι κύκλοι εφάπτονται ανά δύο και έχουν ακτίνα ρ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του καμπυλόγραμμου τμήματος που περιέχεται μεταξύ τους.

3. Αν E_α, E_β, E_γ ειναι τα εμβαδά κανονικών ν-γώνων που έχουν πλευρές ίσες με τις α, β, γ ορθογώνιου τριγώνου, να αποδείξετε ότι $\mathrm{E}_\beta + \mathrm{E}_\gamma = \mathrm{E}_\alpha$.

3ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. Σε ευθεία θεωρούμε διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ. Να αποδείξετε ότι το μήκος του κύκλου με διάμετρο ΑΔ ισούται με το άθροισμα των κύκλων που έχουν διαμέτρους ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ.

2. Αν Α, Β, Γ, Δ είναι διαδοχικές πλευρές κανονικού ν-γώνου, να αποδείξετε ότι $A\Gamma^2 - AB^2 = AB \cdot A\Delta$.

3. Το άθροισμα των γωνιών κανονικού πολυγώνου είναι 8 ορθές και το εμβαδόν του $6\sqrt{3}$. Να βρεθεί η ακτίνα του.

Απαντήσεις των ερωτήσεων κατανόησης

§ 11.1 – 11.2

1. Είναι το ισόπλευρο τρίγωνο.
2. Η ακτίνα του περιγγεγραμμένου κύκλου.
3. γ
4. γ
5. β

§ 11.3

1. i) Λ ii)Λ iii) Σ
2. Είναι $\widehat{AB\Delta} = 180°$.
3. Α
4. Δ

§ 11.4 – 11.5

2. γ

§ 11.6 – 11.8

2. i) Σ ii) Σ iii) Σ iv) Σ v) Σ vi)Σ
3. i) Σ ii) Λ iii) Λ iv)Σ

Λύσεις των Δραστηριοτήτων - Εργασιών

Δραστηριότητα § 11.3

Η $\lambda_{10}^2 = R(R-\lambda_{10})$, που αναφέρεται στο κείμενο, μετασχηματίζεται στην $\lambda_{10}^2 + R\lambda_{10} - R^2 = 0$ δεκτή λύση της οποίας είναι η ζητούμενη. Από τη σχέση $\frac{\lambda_{10}^2}{4}+\alpha_{10}^2=R^2$ με αντικατάσταση του λ_{10} με το ίσο του προκύπτει ότι $\alpha_{10}=\frac{1}{4}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

Δραστηριότητες τέλος § 11.3

1. Από τη σχέση $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$ προκύπτει ότι αν από το $\frac{1}{6}$ του κύκλου αφαιρέσουμε το $\frac{1}{10}$, βρίσκουμε το $\frac{1}{15}$ αυτού. Έτσι από το τόξο που αντιστοιχεί στην πλευρά 6-γώνου αφαιρούμε το τόξο που αντιστοιχεί στην πλευρά 10-γώνου και βρίσκουμε το τόξο της πλευράς κανονικού 15-γώνου.

2. Όμοια με την 1.

Δραστηριότητα § 11.8

Με τη βοήθεια του σχήματος του κειμένου έχουμε:

$$(\mu)=\pi\frac{B\Gamma^2}{8}-(B\Gamma EB)=\pi\,\frac{2AB^2}{8}-\left[\pi\,\frac{(AB)^2}{4}-(AB\Gamma)\right]=(AB\Gamma).$$

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

Οδηγίες για τη διδασκαλία

Επειδή οι ιδιότητες των σχημάτων του χώρου δε γίνονται άμεσα αντιληπτές από τους μαθητές, όπως ενδεχομένως συμβαίνει για τα σχήματα του επιπέδου, γι' αυτό πρέπει οι μαθητές να καθοδηγούνται, ώστε να ανακαλύπτουν αυτές τις ιδιότητες. Μια καλή αρχή για το σκοπό αυτό είναι να μάθουν να περιγράφουν τα σχήματα του χώρου με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη λεπτομέρεια, ιδιαιτέρως στην αρχή, χωρίς βέβαια να παραλείπουν και το αντίστροφο. Δηλαδή από την περιγραφή ενός σχήματος να κατασκευάζουν το σχήμα. Αυτή η άσκηση με τον καιρό θα τους απελευθερώσει από τα δεσμά του σχήματος.

Πρέπει επίσης, οι μαθητές να αντιλαμβάνονται τις ευθείες και τα επίπεδα ως απεριόριστα σχήματα και να μη δεσμεύονται από το σχήμα που τα παριστάνει και είναι πεπερασμένο. Να προεκτείνουν με τη φαντασία τους τα σχήματα όπου αυτό χρειάζεται.

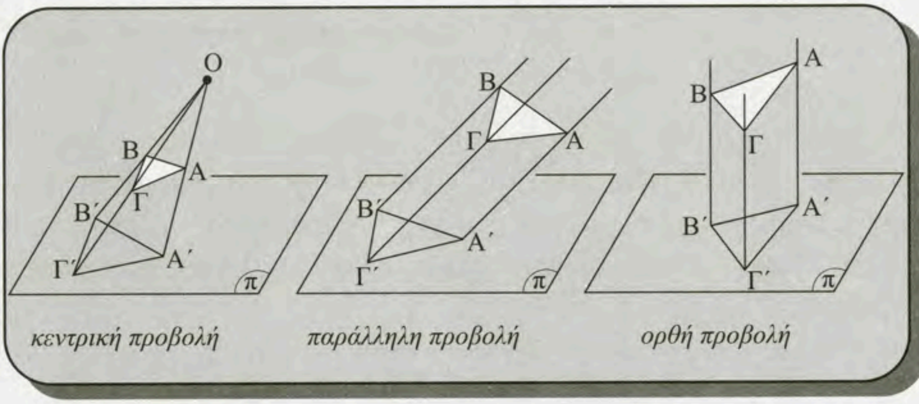
Στα επόμενα περιγράφουμε ορισμένους κανόνες για την ορθή σχεδίαση σχημάτων του χώρου στο επίπεδο.

Η παράσταση σχημάτων του χώρου στο επίπεδο γίνεται ακόμα και από ανθρώπους που δεν έχουν εκπαιδευθεί για το σκοπό αυτό. Υπακούουν δηλαδή σε ένα έμφυτο γεωμετρικό ένστικτο, το οποίο καλλιεργείται με την σπουδή της Γεωμετρίας, ιδιαιτέρως με τη Γεωμετρία του Χώρου.

Η ενστικτώδης αυτή απεικόνιση γίνεται με τη μέθοδο της παράλληλης προβολής των σχημάτων του χώρου στο επίπεδο. Τις μεθόδους παράστασης των σχημάτων στο επίπεδο μελετάει η Παραστατική Γεωμετρία, η οποία τα τελευταία χρόνια, δυστυχώς, δε διδάσκεται στα Λύκεια ούτε στα Μαθηματικά τμήματα. Διδάσκεται, όμως, στα Πολυτεχνεία και στις Πολυτεχνικές Σχολές των Πανεπιστημίων (όχι όλων) γιατί θεωρείται απαραίτητο εφόδιο των Μηχανικών που ασχολούνται με κατασκευές στο χώρο.

Οι μέθοδοι της Παραστατικής Γεωμετρίας είναι προβολές των σχημάτων του χώρου στο επίπεδο. Η προβολή αυτή μπορεί να είναι κεντρική, δηλαδή από σημείο Ο του χώρου προβάλλεται το στερεό σχήμα στο επίπεδο και λέγεται Προοπτική. Με τη μέθοδο αυτή λειτουργεί η όραση (το μάτι) και η φωτογραφική μηχανή.

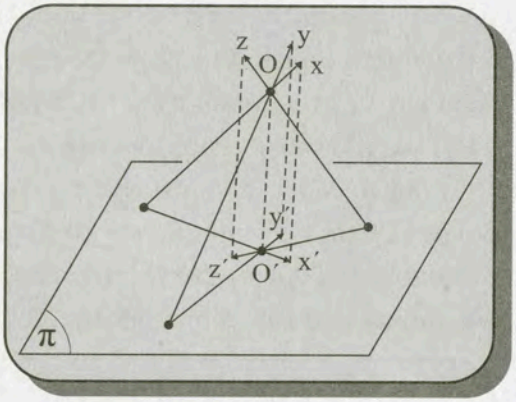
Άλλη μέθοδος παράστασης που κάνει χρήση της παράλληλης προβολής λέγεται αξονομετρία και το στερεό σχήμα προβάλλεται παράλληλα σε κάποια διεύθυνση στο επίπεδο προβολής. Αν η διεύθυνση προβολής είναι κάθετη στο επίπεδο προβολής, τότε η προβολή λέγεται ορθή.



Οι απεικονίσεις αυτές της Προβολικής Γεωμετρίας είναι ιδιάζουσες προβολικές **απεικονίσεις** σχημάτων του χώρου στο επίπεδο.

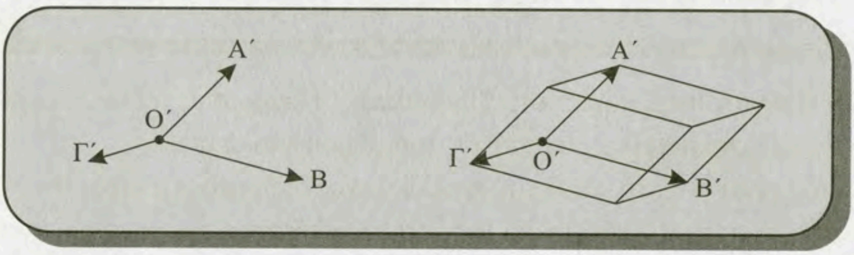
Όπως είναι γνωστό, κατά την προβολή ενός σχήματος τα μήκη και οι γωνίες αλλοιώνονται. Υπάρχουν όμως κάποιες ιδιότητες που διατηρούνται και αυτές είναι οι ιδιότητες του "ανήκει" και του "διέρχεται". Δηλαδή, όταν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, η προβολή του θα ανήκει στην προβολή της ευθείας. Αν ένα επίπεδο ή ευθεία διέρχεται από σημείο, η προβολή του επιπέδου ή της ευθείας θα διέρχεται από την προβολή του σημείου. Επίσης, αν μια ευθεία εφάπτεται σε μια καμπύλη, η προβολή της ευθείας εφάπτεται στην προβολή της καμπύλης, στην προβολή του σημείου επαφής.

Για την παράσταση των σχημάτων της Στερεομετρίας χρησιμοποιούμε συνήθως την παράλληλη προβολή δηλαδή την αξονομετρία. Κατά αυτή την παράσταση διατηρείται επίσης ο λόγος των ευθύγραμμων τμημάτων (θεώρημα του Θαλή) και η παραλληλία των ευθειών, δηλαδή παράλληλες ευθείες προβάλλονται ως παράλληλες.

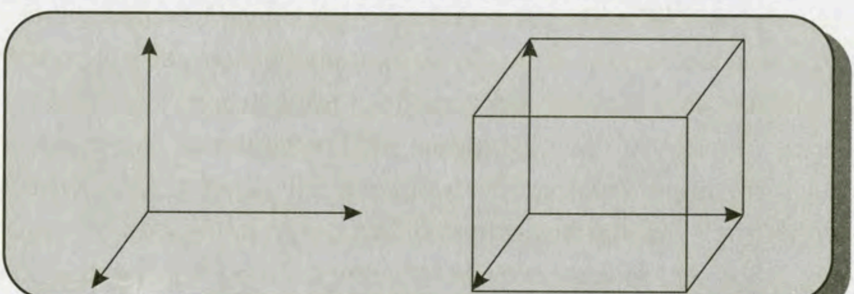


Η αξονομετρία στηρίζεται στο εξής θεώρημα: Τρία τυχαία μη μηδενικά ευθύγραμμα τμήματα O′x′, O′y′, O′z′ ενός επιπέδου, με κοινή αρχή O′, που ανά δύο δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία, είναι προβολές των μοναδιαίων διανυσμάτων ενός τρισορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων του χώρου κατά κάποια παράλληλη προβολή.

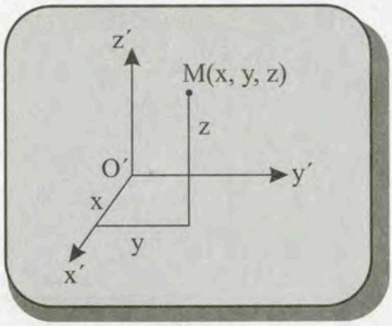
Η πρόταση αυτή λέγεται θεώρημα του Pholke και αποδείχθηκε το 1853. Το θεώρημα αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να κατασκευάζουμε σωστές παραστάσεις σχημάτων στο χαρτί, οποιαδήποτε κι αν είναι τα O′A′, O′B′ και O′Γ′. Για παράδειγμα, ο μοναδιαίος κύβος παριστάνεται ως εξής:



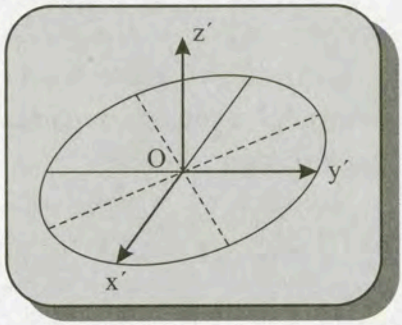
Υπάρχουν βέβαια ορισμένες σχετικές θέσεις των τριών ευθύγραμμων τμημάτων που δίνουν πιο οικεία παράσταση, π.χ.:



Η τοποθέτηση ενός σημείου του χώρου προσδιορίζεται με ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα στις προβολές των αξόνων που έχουν μήκη τις συντεταγμένες του σημείου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

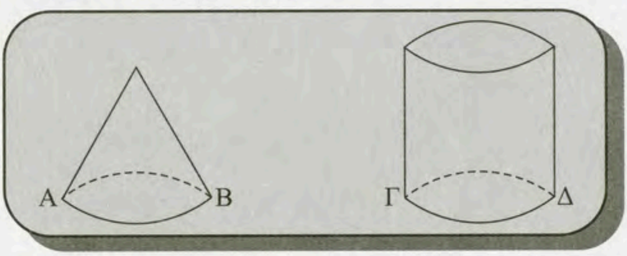


Αν θεωρήσουμε τον μοναδιαίο κύκλο του επιπέδου xOy με κέντρο την αρχή O των αξόνων, αυτός προβάλλεται στο επίπεδο ως έλλειψη της οποίας τα μήκη O΄x΄ και O΄y΄ συνιστούν συζυγείς ημιδιαμέτρους.



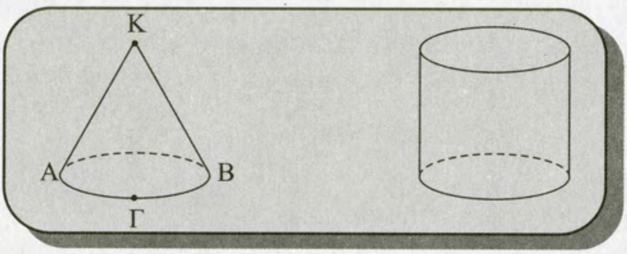
Για να βρούμε τους άξονες πρέπει να κάνουμε ειδική κατασκευή (τη λεγόμενη του Rytz) και οι άξονες της έλλειψης βρίσκονται ο μεγάλος στην οξεία γωνία και ο μικρός στην αμβλεία γωνία των συζυγών διαμέτρων.

Γενικά, η παράλληλη προβολή κύκλου στο επίπεδο είναι έλλειψη. Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι σε παλαιότερα βιβλία τον κώνο και τον κύλινδρο τους σχεδίαζαν ως εξής:



Αυτή η παράσταση ήταν λάθος διότι, οι βάσεις των σχημάτων αυτών είναι κύκλοι οι οποίοι προβάλλονται ως ελλείψεις και είναι γνωστό ότι η έλλειψη δεν έχει «γωνίες», όπως έχουν αυτά τα σχήματα στα σημεία A, B, Γ κτλ.

Η σωστή παράσταση είναι η εξής:



δηλαδή, οι βάσεις είναι ελλείψεις και οι γενέτειρες ΚΑ και ΚΒ εφάπτονται στην έλλειψη στα Α και Β. Το μεικτόγραμμο σχήμα ΚΑΓΒΚ λέγεται περίγραμμα του κώνου και είναι το σύνορο του τόπου εντός του οποίου προβάλλεται ο κώνος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

Ευθείες και Επίπεδα στο χώρο

Ενδεικτικός αριθμός ωρών διδασκαλίας: 6

Το κεφάλαιο αυτό είναι σημαντικό γιατί γίνεται εισαγωγή των μαθητών στο χώρο των τριών διαστάσεων, με στόχο την κατανόηση των σχετικών θέσεων ευθειών και επιπέδων στο χώρο.

Ενδεικτικός προγραμματισμός

1 διδακτική ώρα για τον ορισμό του επιπέδου και τις σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο.

1 διδακτική ώρα για ευθείες, παράλληλα επίπεδα και Θεώρημα του Θαλή.

1 διδακτική ώρα για γωνία δύο ευθειών, ορθογώνιες ευθείες και καθετότητα ευθείας και επιπέδου.

1 διδακτική ώρα για απόσταση ευθείας και επιπέδου και εφαρμογές.

2 διδακτικές ώρες για δίεδρη γωνία, κάθετα επίπεδα, προβολή στο επίπεδο.

Διδακτικοί στόχοι

- Γενικά να κατανοήσουν οι μαθητές μέσα στο χώρο τις θέσεις και σχέσεις των βασικών στοιχείων του, που είναι τα σημεία, οι ευθείες και το επίπεδο.
- Να γνωρίζουν πώς ορίζεται ένα επίπεδο στο χώρο.
- Να γνωρίζουν τις σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου και να τις εκφράζουν με σχήματα.
- Να γνωρίζουν τις σχετικές θέσεις δύο επιπέδων.

- Τέλος, τις γνωστές έννοιες παραλληλίας και καθετότητας να τις επεκτείνουν στο χώρο και να γνωρίζουν τις βασικές προτάσεις που αναφέρονται σε αυτές.

Οδηγίες για τη διδασκαλία - Διδακτικές προσεγγίσεις

Αρχικά ορίζεται το επίπεδο στο χώρο από 3 μη συνευθειακά σημεία και με τους άλλους τρόπους που προκύπτουν ως πορίσματα.

Για την παράσταση του επιπέδου με ένα παραλληλόγραμμο γίνεται αντιπαράθεση με την ευθεία στο επίπεδο που παριστάνεται με ευθύγραμμο τμήμα ή μπορεί ακόμα να είναι νοητό το επίπεδο, οριζόμενο από ικανό αριθμό στοιχείων, όπως στο επίπεδο μια ευθεία ορίζεται από δύο σημεία.

Από τη βασική πρόταση ότι εκτός επιπέδου υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο, προκύπτει ότι υπάρχει ευθεία που δεν έχει όλα της τα σημεία στο επίπεδο και από αυτό προκύπτουν όλες οι σχετικές θέσεις.

Για την καθετότητα και παραλληλία θα πρέπει να επισημανθούν τα βασικά κριτήρια που μας εξασφαλίζουν τον έλεγχο ή την κατασκευή κάθετων σχημάτων (ευθειών ή επιπέδων).

Για τις κατασκευές, βέβαια, θα τονισθεί ότι οι περισσότερες είναι νοητές αφού στο χώρο δεν μπορούμε να χαράξουμε π.χ. ευθεία με τον κανόνα, διότι χρειάζεται πρώτα το επίπεδο, που συνήθως είναι ορισμένο άλλα νοητό.

Μπορούμε να επισημάνουμε και την αντιστοιχία που υπάρχει μεταξύ προτάσεων της επιπεδομετρίας και της γεωμετρίας του χώρου, αν θεωρήσουμε την αντιστοιχία:

σημείο → ευθεία
ευθεία → επίπεδο
επίπεδο → χώρος

Έτσι έχουμε αντίστοιχους όρους:

ημιευθεία → ημιεπίπεδο
ημιεπίπεδο → ημιχώρος
τομή ευθειών → τομή επιπέδων
επίπεδο σχήμα → στερεό σχήμα

ή αντίστοιχες προτάσεις

Δύο ευθείες του επιπέδου τέμνονται σε ένα σημείο και ορίζουν μία επίπεδη γωνία.	Δύο επίπεδα του χώρου τέμνονται κατά μία ευθεία και ορίζουν μια δίεδρη γωνία.

Για τις ασύμβατες να τονισθούν όλες οι ιδιότητες.

Επισημαίνεται ότι στην καθετότητα και παραλληλία επιπέδων υπάρχουν πολλές προτάσεις που η απόδειξή τους είναι σύντομη και συνήθως ανάγεται σε πρόταση της επιπεδομετρίας.

Στο θεώρημα της καθετότητας ευθείας και επιπέδου καθώς επίσης και στο θεώρημα των τριών καθέτων, υπάρχουν αποδείξεις με μετρικές σχέσεις. Οι αποδείξεις όμως που παραθέτουμε θεωρούμε ότι είναι πιο «γεωμετρικές» και καταδεικνύουν τις σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών στοιχείων.

Να κατανοήσουν την έννοια της δίεδρης γωνίας και την αντίστοιχη επίπεδη, ώστε να συγκρίνουν δίεδρες γωνίες μεταξύ τους.

Να τονιστεί η έννοια της γωνίας ευθείας και επιπέδου και ότι αυτή είναι η μικρότερη από τις γωνίες που σχηματίζει η ευθεία με τις ευθείες του επιπέδου που διέρχονται από το ίχνος της.

Σχέδιο μαθήματος με φύλλο Εργασίας

Ενότητα: Ευθείες και επίπεδα στο χώρο.

Στόχοι:

Να μπορούν οι μαθητές να διατυπώνουν και να αποδεικνύουν τις παρακάτω προτάσεις.

i) Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και ε_1 τέμνει ένα επίπεδο π. Τότε και η ε_2 τέμνει το π.

ii) Αν $\varepsilon_1 \perp \pi$ και $\varepsilon_2 \perp \pi$,τότε θα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

iii) Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_3$ και $\varepsilon_2 // \varepsilon_3$, τότε θα είναι και $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Μέθοδος: Μεικτή (ερωτήσεις - καθοδηγούμενη μάθηση).

Κινητοποίηση: Θα γίνει με ένα ανοικτό πρόβλημα.

Παρουσίαση: Θα γίνει με το φύλλο εργασίας, που ακολουθεί.

Εμπέδωση: Καθετί που θα αποδεικνύεται θα μεταφέρεται στην πράξη μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας. Επίσης θα δοθούν οι παρακάτω ασκήσεις για καλύτερη εμπέδωση των θεμάτων που θα αναπτυχθούν.

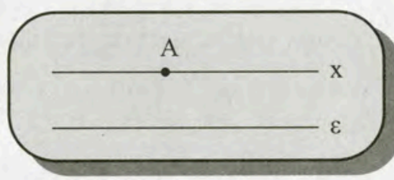
1. Δίνονται μία ευθεία ε και ένα σημείο Ο εκτός αυτής. Από το Ο διέρχεται μια τυχαία ευθεία δ. Να εξετάσετε πότε η ευθεία δ βρίσκεται στο επίπεδο (Ο,ε).

2. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών στρεβλού τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

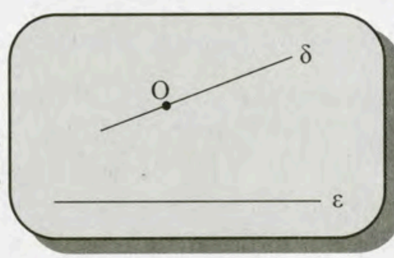
3. Δίνονται $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και ένα σημείο Α που δε βρίσκεται στο επίπεδο $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Να κατασκευάσετε επίπεδο που να διέρχεται από το Α και να είναι κάθετο στις ε_1 και ε_2.

Φύλλο Εργασίας

1. Αν έχουμε μια ευθεία ε στο χώρο και ένα σημείο Α εκτός αυτής, τότε υπάρχει μία μόνο ευθεία Αx//ε.

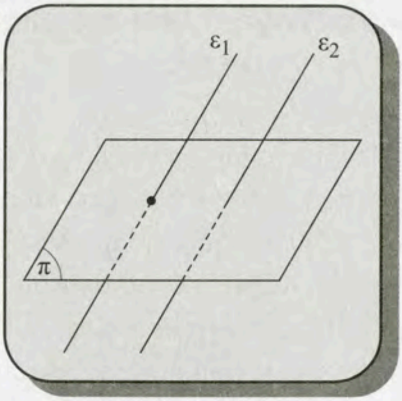


2. Εφαρμογή: Δίνονται μία ευθεία ε και ένα σημείο Ο εκτός της ε. Από το Ο διέρχεται μία τυχαία ευθεία δ. Να εξετάσετε πότε η ευθεία δ βρίσκεται στο επίπεδο (Ο,ε).



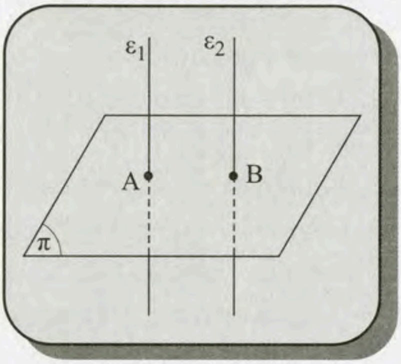
3. Θεώρημα Ι: Αν ένα επίπεδο τέμνει μία από δύο παράλληλες ευθείες, τότε τέμνει και την άλλη.

4. Πόρισμα: Αν μία από δύο παράλληλες ευθείες τέμνει ένα επίπεδο, τότε θα το τέμνει και η άλλη.



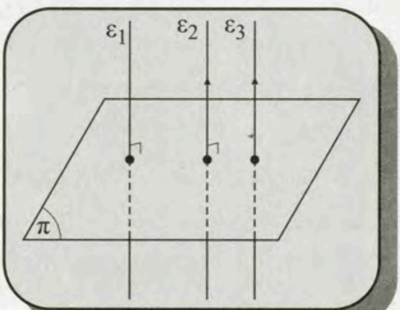
5. Θεώρημα ΙΙ. Αν δύο διαφορετικές ευθείες ε_1, ε_2 είναι κάθετες σε ένα επίπεδο π, τότε είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

6. Πόρισμα: Κάθε επίπεδο, που είναι κάθετο σε μία από δύο παράλληλες ευθείες, είναι κάθετο και στην άλλη.



7. Εφαρμογή: Δίνονται ένα επίπεδο π και οι ευθείες $\varepsilon_1 \perp \pi$, $\varepsilon_2 \perp \pi$ και $\varepsilon_3 // \varepsilon_2$. Μας ζητούν να αποδείξουμε ότι $\varepsilon_3 // \varepsilon_1$.

8. Θεώρημα ΙΙΙ. Δύο διαφορετικές ευθείες που είναι παράλληλες προς τρίτη ευθεία είναι και μεταξύ τους παράλληλες.



9. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών στρεβλού τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Εργασία για το σπίτι:

Άσκηση: Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και ένα σημείο Α που δε βρίσκεται στο επίπεδο $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Να κατασκευάσετε επίπεδο που να διέρχεται από το Α και να είναι κάθετο στις ε_1 και ε_2.

Αξιολόγηση και ενδεικτικά κριτήρια αξιολόγησης

Ένας από τους στόχους είναι η ικανότητα να σχεδιάζουν στο επίπεδο σχήματα του χώρου.

Οι προβολές ευθειών παράλληλων πρέπει να είναι παράλληλες.

Η γνώση αυτή πρέπει να ελέγχεται.

Το θεώρημα των τριών καθέτων καθώς και οι ορθογώνιες στο χώρο με τις προτάσεις που απορρέουν είναι αντικείμενο αξιολόγησης.

Η αξιολόγηση για την εμπέδωση της γνώσης μπορεί να γίνεται με ερωτήσεις που η απάντησή τους είναι μια νοητή κατασκευή.

Παραδείγματα

1. Μπορούμε απο ένα σημείο να φέρουμε ευθεία που να τέμνει δύο ασύμβατες ;
2. Με τέσσερα μη συνεπίπεδα σημεία πόσα επίπεδα ορίζονται ;
3. Πώς από σημείο θα φέρουμε ευθεία παράλληλη σε δύο επίπεδα ;
4. Πώς θα φέρουμε επίπεδο παράλληλο σε δύο ασύμβατες ευθείες;
5. Πώς θα κατασκευάσουμε από σημείο ευθεία παράλληλη σε επίπεδο και συγχρόνως ορθογώνια σε ευθεία του επιπέδου ;
6. Δίνονται δύο σημεία εκτός επιπέδου π. Υπάρχουν άπειρα σημεία του π που ισαπέχουν από αυτό. Πώς θα βρεθούν ;
7. Σημείο Σ απέχει από επίπεδο απόσταση α. Πώς θα βρούμε σημεία του επιπέδου που απέχουν από το Σ απόσταση β, ($\beta > \alpha$) ;
8. Πότε η προβολή ευθύγραμμου τμήματος σε επίπεδο είναι ίση με το μισό του;
9. Σημείο Σ χωρίζει ευθύγραμμο τμήμα του χώρου σε λόγο 2/3. Ποιος θα είναι ο λόγος των προβολών των δύο τμημάτων; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. Δύο ευθείες είναι ορθογώνιες. Να ορισθεί το επίπεδο που περιέχει τη μία και είναι κάθετο στην άλλη.

2. Δίνονται δύο ασύμβατες ευθείες, σημείο Α της μιας και σημείο Β της

άλλης. Να προσδιορίσετε τα σημεία Μ του χώρου, ώστε $\frac{MA}{MB}=2$.

3. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα και οι ευθείες ΑΒ και Α΄Β΄ τέμνονται στο Δ, οι ΒΓ και Β΄Γ΄ στο Ε και οι ΑΓ και Α΄Γ΄ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

i) τα σημεία Δ, Ε, Ζ ειναι συνευθειακά.

ii) οι ευθείες ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ διέρχονται απο το ίδιο σημείο.

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. Δίνονται στο χώρο τέσσερα σημεία Α,Β,Γ,Δ που δεν ανήκουν όλα στο ίδιο επίπεδο. Να εξηγήσετε πώς θα φέρουμε επίπεδο που θα ισαπέχει από τα σημεία αυτά.

2. Στο επίπεδο του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ κάθετο στο επίπεδο του τριγώνου. Αν Μ το μέσο της ΒΓ να αποδειχθεί ότι:

i) η ΔΜ είναι κάθετη στη ΒΓ,

ii) η ΒΓ είναι κάθετη στό επίπεδο ΑΔΜ.

3. Ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ στο χώρο έχει την κάθετη πλευρά ΑΒ παράλληλη σε επίπεδο π.

i) Να αποδείξετε ότι η προβολή του στο π είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

ii) Αν η γωνία της ΑΓ με το επίπεδο π είναι 60^o, ποια η σχέση του εμβαδού της προβολής με το εμβαδόν του ΑΒΓ;

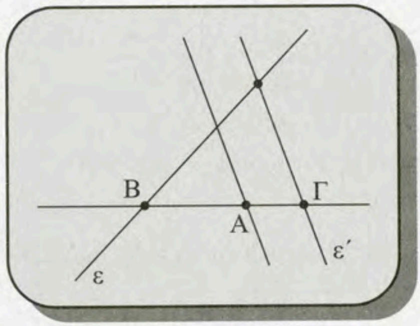
Απαντήσεις των ερωτήσεων κατανόησης

§ 12.1 – 2

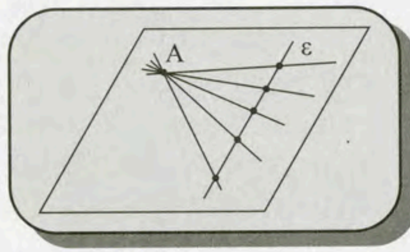
1. Η ευθεία που ολισθαίνει γράφει το επίπεδο που ορίζουν οι δύο (i) παράλληλες ή (ii) τεμνόμενες ευθείες, διότι δύο σημεία της ανήκουν σε αυτό το επίπεδο. Εξαιρούμε το κοινό σημείο των δύο ευθειών διότι από αυτό δεν ορίζει κατά μοναδικό τρόπο μία ευθεία.

2. Ο κύκλος είναι επίπεδο σχήμα. Άρα, κάθε δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου ορίζουν ευθεία που ανήκει σε αυτό. Δηλαδή, ο γεωμετρικός τόπος των ευθειών αυτών είναι το επίπεδο του κύκλου.

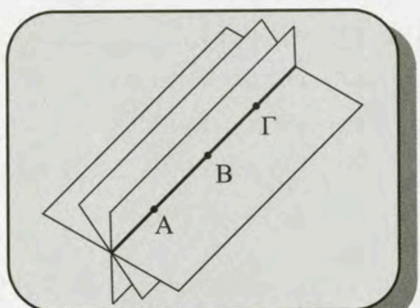
3. Ενώνουμε το σημείο Α με τυχόν σημείο Β της ε. Διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις: (i) αν η ευθεία ΑΒ τέμνει την ευθεία ε΄ σε ένα σημείο Γ, τότε το σημείο Α ανήκει στο επίπεδο (ε,ε΄), (ii) αν η ευθεία ΑΒ είναι παράλληλη στην ε΄, τότε το σημείο Α ανήκει στο επίπεδο (ε,ε΄) και μάλιστα για άλλη θέση του Β η ΑΒ δε θα είναι παράλληλη στην ε΄ και (iii) η ευθεία ΑΒ δεν τέμνει την ε΄, τότε το Α δεν ανήκει στο επίπεδο (ε,ε΄).



4. Το σημείο Α και το τυχαίο σημείο Β της ευθείας ε ορίζουν ευθείες που διέρχονται από το Α και βρίσκονται όλες στο επίπεδο (Α,ε).



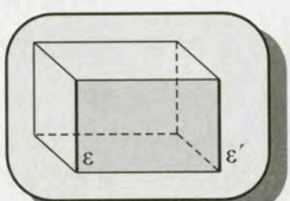
5. Αν Α,Β και Γ είναι τρία συνευθειακά σημεία, τότε υπάρχουν άπειρα επίπεδα που διέρχονται από την ευθεία ΑΒ.



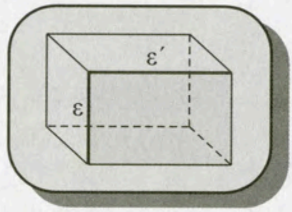
§ 12.3

1.

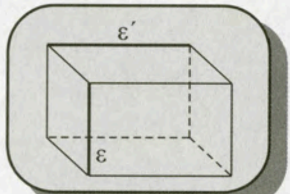
i) Η ευθεία ε είναι παράλληλη στην ε΄.



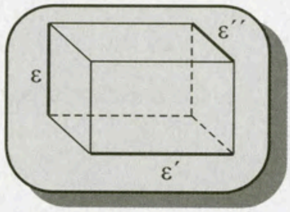
ii) Η ευθεία ε τέμνει την ε΄.



iii) Η ε είναι ασύμβατη στην ε΄. Κάθε επίπεδο που περιέχει την ε΄ δεν περιέχει την ε.

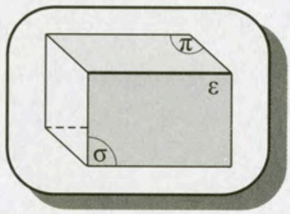


iv) Οι ευθείες ε, ε′ και ε″ είναι ανά δύο ασύμβατες.

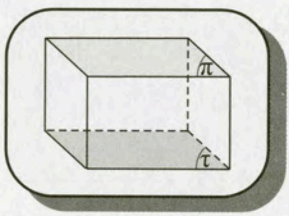


2.

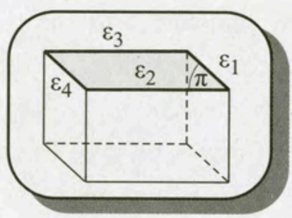
i) Τα επίπεδα π και σ τέμνονται στην ευθεία ε.



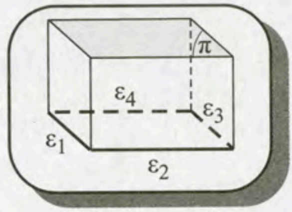
ii) Τα επίπεδα π και τ είναι παράλληλα.



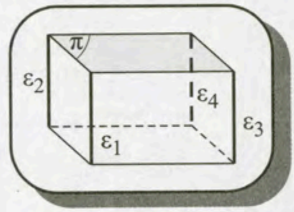
3. i) Οι ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 και ε_4 ανήκουν στο επίπεδο π.



ii) Οι ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 και ε_4 είναι παράλληλες στο επίπεδο π.

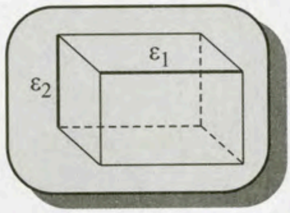


iii) Οι ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 και ε_4 τέμνουν το επίπεδο π.

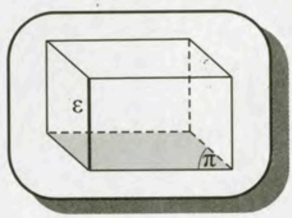


§ 12.5

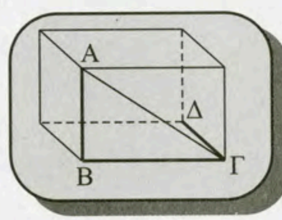
1. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι ορθογώνιες.



2. Η ευθεία ε είναι κάθετη στο επίπεδο π.



3. Θεωρούμε τις ευθείες ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ και ΑΓ, οι οποίες επαληθεύουν τις τρεις εκφράσεις του θεωρήματος των τριών καθέτων.



§ 12.7

1. Από ένα σημείο της ακμής της δίεδρης φέρουμε δύο ευθείες, μία σε κάθε έδρα, κάθετες στην ακμή. Η γωνία που αυτές ορίζουν είναι η αντίστοιχη επίπεδη της δίεδρης.

2. Κατασκευάζουμε μία αντίστοιχη της δίεδρης γωνίας και φέρουμε τη διχοτόμο της. Το επίπεδο που ορίζεται από την ακμή της δίεδρης και τη διχοτόμο είναι το ζητούμενο.

§ 12.8

1. Η προβολή Α΄Β΄ ενός ευθύγραμμου τμήματος σε επίπεδο π έχει μήκος μικρότερο ή ίσο του μήκους ΑΒ. Η ισότητα ισχύει όταν το ΑΒ είναι παράλληλο στο π. Επίσης το Α΄Β΄ έχει μηδενικό μήκος, αν το ΑΒ είναι κάθετο στο π.

2. Το μέσο ευθύγραμμου τμήματος προβάλλεται σε μέσο, σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή.

3. 60°. Γιατί στο ορθογώνιο τρίγωνο με μία γωνία 60°, η προσκείμενη κάθετη πλευρά είναι το μισό της υποτείνουσας.

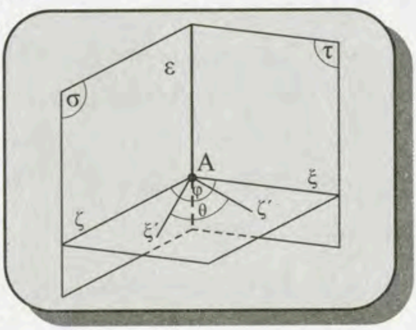
4. Όταν είναι κάθετη στο επίπεδο.

Λύσεις των Δραστηριοτήτων - Εργασιών

1η Δραστηριότητα § 12.8

Έστω ε(σ,τ) μια δίεδρη γωνία και Α τυχαίο σημείο της ακμής της ε.

i) Στο επίπεδο σ φέρουμε την ευθεία ζ που είναι κάθετη στην ε στο σημείο Α. Επίσης, στο επίπεδο τ φέρουμε την ευθεία ξ που είναι κάθετη στην ε στο Α. Οι ευθείες ξ και ζ τέμνονται στο σημείο Α, άρα είναι συνεπίπεδες. Η γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ξ και ζ, στο επίπεδο (ξ,ζ), είναι η αντίστοιχη επίπεδη της δίεδρης ε(σ,τ).



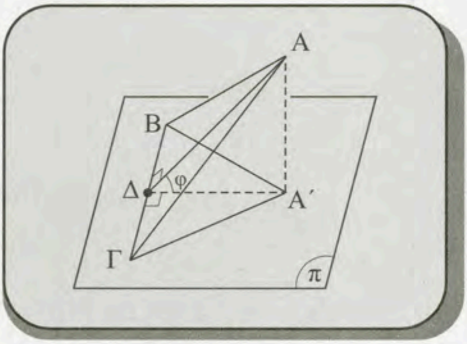
ii) Στο σημείο Α φέρουμε επίπεδο π κάθετο στην ευθεία ε. Τα επίπεδα π και σ τέμνονται στην ευθεία ζ και τα επίπεδα π και τ τέμνονται στην ευθεία ξ. Η γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ξ και ζ, στο επίπεδο π, είναι η αντίστοιχη επίπεδη της δίεδρης ε(σ,τ).

iii) Στο σημείο Α φέρουμε την ευθεία ζ΄ κάθετη στο επίπεδο σ και την ευθεία ξ΄κάθετη στο επίπεδο τ. Η ευθεία ξ΄ είναι κάθετη στις ευθείες ε και ξ. Επίσης, η ευθεία ζ΄είναι κάθετη στις ευθείες ε και ζ.

Επομένως, οι ευθείες ξ, ξ΄, ζ και ζ΄ είναι ευθείες του επιπέδου π. Τότε όμως η γωνία των ευθειών ξ΄και ζ΄ είναι παραπληρωματική της γωνίας που σχηματίζουν οι ευθείες ξ και ζ διότι έχουν πλευρές κάθετες μία προς μία. Επομένως, η παραπληρωματική της γωνίας των ευθειών ξ΄ και ζ΄ είναι η αντίστοιχη επίπεδη της δίεδρης.

2η Δραστηριότητα § 12.8

i) Έστω ΑΒΓ τρίγωνο του οποίου η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στο επίπεδο προβολής π. Θεωρούμε τις προβολές των κορυφών του τριγώνου ΑΒΓ στο επίπεδο π. Τα σημεία Β και Γ ταυτίζονται με τις προβολές τους στο π, επειδή είναι σημεία του π και έστω Α΄ η προβολή του Α στο π. Το τρίγωνο ΑΒΓ προβάλλεται στο Α΄ΒΓ. Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, τότε το τμήμα Α΄Δ είναι ύψος του τριγώνου Α΄ΒΓ, όπως προκύπτει από το θεώρημα των τριών καθέτων. Επίσης, η γωνία $A\hat{\Delta}A' = \varphi$ είναι η αντίστοιχη επίπεδη της δίεδρης γωνίας ΒΓ(Α, Α΄), γιατί οι ΑΔ και Α΄Δ είναι κάθετες στην ακμή ΒΓ.

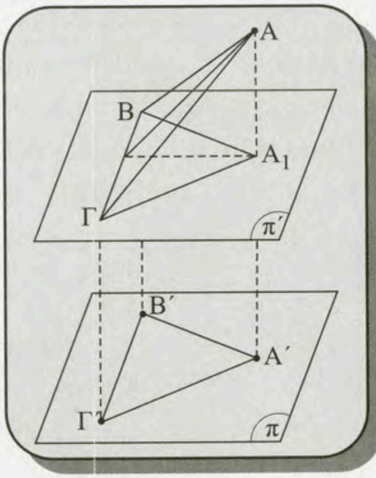


Έχουμε λοιπόν:

$$\varepsilon\mu\beta(A'B\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A'\Delta = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = \varepsilon\mu\beta(AB\Gamma) \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi,$$

γιατί $A'\Delta = A\Delta\sigma\upsilon\nu\varphi$ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΑ΄Δ.

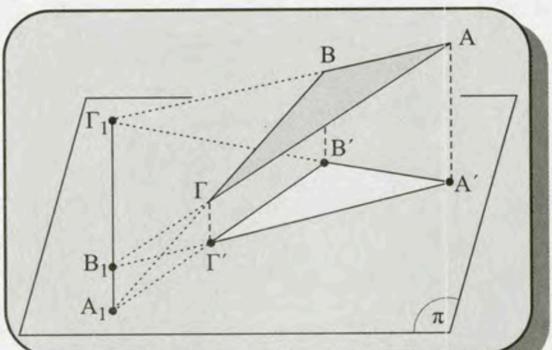
ii) Έστω τώρα ότι η πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ είναι παράλληλη στο επίπεδο π και Α΄Β΄Γ΄ η προβολή του τριγώνου ΑΒΓ στο π. Φέρουμε το επίπεδο π΄ παράλληλο στο π που να περιέχει την ευθεία ΒΓ, και έστω $Α_1$ το σημείο τομής του π΄ με την ΑΑ΄. Τότε τα $Α_1Α΄Γ΄Γ$, $Α_1Α΄Β΄Β$ και ΒΒ΄Γ΄Γ είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα, άρα τα τρίγωνα $Α_1ΒΓ$ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.



Έχουμε λοιπόν:

$$εμβ(Α΄Β΄Γ΄) = εμβ(Α_1ΒΓ) = εμβ(ΑΒΓ)συνφ.$$

iii) Θεωρούμε τώρα ότι οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν το επίπεδο π στα σημεία $Α_1$, $Β_1$ και $Γ_1$. Τότε έχουμε:



$εμβ(Α΄Β΄Γ΄) = εμβ(Α΄Γ_1Β_1) - εμβ(Β΄Α_1Γ_1) + εμβ(Γ΄Α_1Β_1) = [εμβ(ΑΓ_1Β_1) - εμβ(ΒΑ_1Γ_1) + εμβ(ΓΑ_1Β_1)] \cdot συνφ = εμβ(ΑΒΓ) \cdot συνφ$,

όπου φ η γωνία που σχηματίζουν το επίπεδο π και το επίπεδο του τριγώνου.

iv) Αν το επίπεδο του τριγώνου ΑΒΓ είναι παράλληλο στο επίπεδο προβολής π, τότε η προβολή του τριγώνου είναι τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ ίσο με το αρχικό. Επομένως ισχύει:

$$\varepsilon\mu\beta(A'B'\Gamma') = \varepsilon\mu\beta(AB\Gamma)\sigma\upsilon\nu\varphi, \text{ όπου } \varphi = 0°.$$

v) Αν τέλος το επίπεδο του τριγώνου ΑΒΓ είναι κάθετο στο επίπεδο προβολής π, τότε η προβολή του τριγώνου εκφυλίζεται σε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Επομένως και πάλι ισχύει:

$$\varepsilon\mu\beta(A'B'\Gamma') = \varepsilon\mu\beta(AB\Gamma)\sigma\upsilon\nu\varphi, \text{ όπου } \varphi = 90°.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

Στερεά σχήματα

Ενδεικτικός αριθμός ωρών διδασκαλίας: 8

Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται δύο οικογένειες στερεών σχημάτων. Στην πρώτη οικογένεια ανήκουν τα πρίσματα, οι πυραμίδες και οι κόλουρες πυραμίδες. Τα πρίσματα εξειδικεύονται στα πλάγια παραλληλεπίπεδα, στα ορθά παραλληλεπίπεδα και στους κύβους. Ενώ οι πυραμίδες εξειδικεύονται στα τετράεδρα που είναι τα απλούστερα στερεά σχήματα και στις τετραγωνικές, πενταγωνικές κτλ. πυραμίδες.

Των σχημάτων αυτών παρουσιάζονται μερικές απλές ιδιότητες και εξάγονται τύποι για τον υπολογισμό της επιφάνειας και του όγκου τους.

Πρέπει να αναφέρουμε ότι τα σχήματα αυτά είναι πολύ χρήσιμα στην καθημερινή ζωή και ότι οι κατασκευές κτιρίων ή άλλων έργων στην πραγματικότητα προσομοιάζονται με τέτοια σχήματα.

Η δεύτερη οικογένεια στερεών που μελετώνται είναι τα λεγόμενα εκ περιστροφής. Αυτά είναι ο κύλινδρος, ο κώνος και η σφαίρα που δημιουργούνται κατά την περιστροφή ενός ορθογωνίου γύρω από μία πλευρά του, ενός ορθογώνιου τριγώνου γύρω από μία κάθετη πλευρά του και ενός ημικυκλίου γύρω από τη διάμετρό του αντίστοιχα.

Τα στερεά αυτά έχουν επιφάνεια που είναι εξ ολοκλήρου κυρτή (όπως η σφαίρα) ή είναι κυρτή αλλά έχει και επίπεδα μέρη, όπως ο κύλινδρος και ο κώνος.

Τα στερεά εκ περιστροφής κατασκευάζονται πολύ εύκολα τοποθετώντας μια μάζα κατάλληλης ύλης (πηλό, μέταλλο, ξύλο κ.λ.π.) σε ένα κατάλληλο «τόρνο». Γι' αυτό υπάρχουν πολλές εφαρμογές τόσο στην τεχνολογία, όσο και στην τέχνη με αυτά τα στερεά. Παραδείγματα τέτοιων σχημάτων συναντά κανείς σε εξαρτήματα μηχανών, σε κυκλικές (κυλινδρικές) σκάλες, σε κωνικές οροφές κτιρίων, σε τρούλους εκκλησιών κτλ.

Τα χρησιμοποιούμενα σχήματα από το διδάσκοντα δεν πρέπει να είναι τυποποιημένα, αλλά να αλλάζουν ώστε να βλέπουν οι μαθητές και άλλες μορφές του ίδιου στερεού. Ένα τυχαίο πρίσμα θα το σχεδιάζουμε πότε τριγωνικό, πότε τετραγωνικό και εμφανώς πλάγιο. Ένα τυχαίο τετράεδρο πρέπει να μη φαίνεται κανονικό. Η κορυφή τυχαίας πυραμίδας μπορεί να προβάλλεται στο επίπεδο της βάσης έξω από τη βάση της. Τα κανονικά όμως σχήματα πρέπει να φαίνονται κανονικά.

Ενδεικτικός προγραμματισμός

1 διδακτική ώρα για τα πολύεδρα γενικά και για τα πρίσματα και ειδικότερα για παραλληλεπίπεδο και κύβο.
1 διδακτική ώρα για μέτρηση πρίσματος (ανάπτυγμα, επιφάνεια και όγκο).
2 διδακτικές ώρες για πυραμίδα και κόλουρο πυραμίδα.
1 διδακτική ώρα για κώνο.
1 διδακτική ώρα για κώνο και κόλουρο κώνο.
2 διδακτικές ώρες για σφαίρα.

Διδακτικοί στόχοι

- Η γνώση των στερεών σχημάτων και των στοιχείων αυτών.
- Οι ιδιότητες των πρισμάτων, τα κυριότερα είδη αυτών και η μέτρηση της επιφάνειας και του όγκου τους.
- Οι τομές στερεών απο επίπεδα σε διάφορες θέσεις.
- Η μελέτη των στερεών εκ περιστροφής, κώνου, κυλίνδρου και σφαίρας, βασικές ιδιότητες αυτών και μέτρηση επιφάνειας και όγκου τους.

Οδηγίες για τη διδασκαλία - Διδακτικές προσεγγίσεις

Τα στερεά διακρίνονται στα πολύεδρα που ορίζονται απο επίπεδα και έχουν επίπεδες πολυγωνικές επιφάνειες και στα εκ περιστροφής που έχουν επίπεδες αλλά και κυρτές επιφάνειες και προκύπτουν από την περιστροφή ορθογώνιου τριγώνου, ορθογωνίου και ημικυκλίου γύρω από συγκεκριμένο άξονα περιστροφής.

Αν και οι πολυεδρικές στερεές γωνίες είναι εκτός διδακτέας ύλης, πρέπει να γίνει αναφορά στην τρίεδρη στερεά γωνία, για να κατανοήσουν οι μαθητές το πρίσμα και την πυραμίδα. Πρέπει επίσης να παρουσιαστούν σύντομα οι σχετικές θέσεις τριών επιπέδων.

Το τετράεδρο θα αντιμετωπισθεί κυρίως μέσα από ασκήσεις και εφαρμογές.

Για τον όγκο κώνου και κυλίνδρου, πριν από την αναφορά στους τύπους να ορισθούν οι όγκοι των εγγεγραμμένων πρισμάτων και πυραμίδων και να προκύψουν οι όγκοι κώνου και κυλίνδρου ως όρια.

Στον υπολογισμό του όγκου του κυλίνδρου και του κώνου πρέπει να γίνει κατανοητό ότι αν θεωρήσουμε εγγεγραμμένα ή περιγεγραμμένα σχήματα θα καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Δηλαδή οι αντίστοιχοι τύποι είναι όριο αύξουσας ακολουθίας, αν θεωρούμε εγγεγραμμένα σχήματα και όριο φθίνουσας ακολουθίας, αν θεωρούμε περιγεγραμμένα σχήματα.

Ο τύπος του όγκου κόλουρου κώνου μπορεί εύκολα να αποδειχθεί εάν από τον αρχικό κώνο αν αφαιρέσουμε το μικρό κώνο που αποτέμνεται από την κορυφή του. Το ίδιο και για την κόλουρη πυραμίδα.

Τα αναπτύγματα των κώνων και κυλίνδρων κατασκευάζονται ως όρια αναπτυγμάτων εγγεγραμμένων πυραμίδων και πρισμάτων. Η σφαίρα είναι γνωστό ότι δεν αναπτύσσεται στο επίπεδο γιατί έχει ποιοτικώς διαφορετική καμπυλότητα από τον κύλινδρο και τον κώνο. Τούτο συνεπάγεται ότι δεν μπορεί να υπάρξει τέλειος χάρτης.

Για τη σφαίρα, εφόσον υπάρχει χρόνος, μπορούν να εξετασθούν θέματα που αναφέρονται σε εγγεγραμμένους ή περιγεγραμμένους κυλίνδρους και κώνους που υπάρχουν στις ασκήσεις του βιβλίου.

Τέλος, πρέπει να αναφερθεί κανείς στην παράγραφο των κανονικών πολυέδρων. Θα μπορούσαν να δοθούν εργασίες κατασκευής των κανονικών πολυέδρων με χαρτόνι από τα αναπτύγματά τους.

Αξιολόγηση και ενδεικτικά κριτήρια αξιολόγησης

Ένας από τους στόχους είναι η ικανότητα των μαθητών να σχεδιάζουν τα στερεά σχήματα στο επίπεδο και να προσδιορίζουν τα στοιχεία τους.

Επίσης, πρέπει να είναι γνωστά τα διάφορα είδη πρισμάτων και πυραμίδων και οι ιδιότητές τους.

Αξιολογείται η γνώση των διάφορων τύπων όγκων και επιφανειών των στερεών σχημάτων αλλά και η γνώση του τρόπου παραγωγής τους.

1ο Σχέδιο κριτηρίου αξιολόγησης

1. Να αποδειχθεί ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το κέντρο παραλληλεπιπέδου και έχει τα άκρα του στην επιφάνειά του διχοτομείται από το κέντρο.

2. Επιλέγουμε τρεις κορυφές ενός κύβου που δεν βρίσκονται στην ίδια έδρα. Το επίπεδο που ορίζουν τέμνει τον κύβο. Να προσδιορίσετε το σχήμα της τομής σε όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

3. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των ακμών παραλληλεπιπέδου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των τεσσάρων διαγωνίων του.

2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. Ένα τετράεδρο έχει βάση το τρίγωνο με πλευρές 3, 4, και 5 και ύψος 6. Να υπολογίσετε τον όγκο του.

2. Κανονική τριγωνική πυραμίδα έχει πλευρά της βάσης α και η γωνία της παράπλευρης έδρας με τη βάση είναι 45^o. Να υπολογίσετε τον όγκο της.

3. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που έχει κορυφές τα μέσα των ακμών κύβου, ακμής α.

3ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. Κύλινδρος έχει ύψος ίσο με την ακτίνα της βάσης και όγκο 64π. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας.

2. Ορθογώνιο με διαστάσεις α και β περιστρέφεται περί άξονα παράλληλο στη β, που απέχει απόσταση $\frac{\alpha}{2}$ από την πλησιέστερη πλευρά προς τον άξονα. Να βρείτε την επιφάνεια του παραγόμενου στερεού..

3. Κύβος είναι εγγεγραμμένος σε κύλινδρο που έχει όγκο 32π. Να υπολογίσετε τον όγκο του κύβου.

4ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. Να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού της βάσης ενός κώνου προς το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειάς του, αν έχει ύψος ίσο με τη διάμετρο της βάσης του.

2. Ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κάθετη πλευρά α στρέφεται περί την υποτείνουσα. Να υπολογισθεί ο όγκος και η επιφάνεια του παραγόμενου στερεού.

3. Να διχοτομηθεί η κυρτή επιφάνεια κώνου ακτίνας ρ και ύψους υ με επίπεδο παράλληλο προς τη βάση του.

5ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης

1. Δύο ομόκεντρες σφαίρες έχουν ακτίνες α και 2α. Ένα επίπεδο εφάπτεται στην εσωτερική. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κύκλου τομής της εξωτερικής σφαίρας με το επίπεδο.

2. Να βρεθεί ο λόγος του ύψους κυλίνδρου προς την ακτίνα της σφαίρας, αν έχουν ίσες ακτίνες και ισοδύναμες κυρτές επιφάνειες.

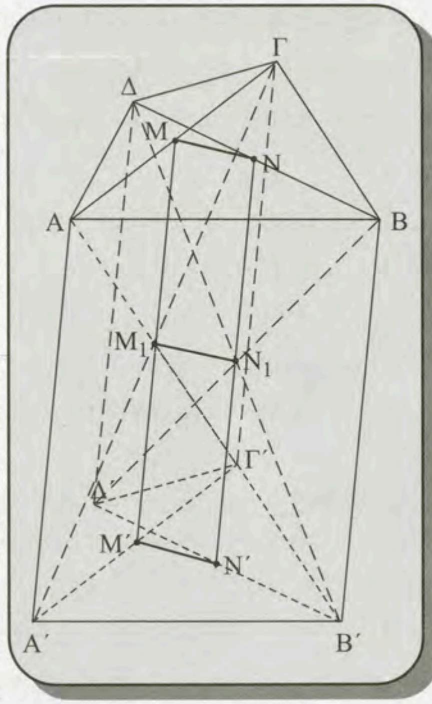
3. Σε σφαίρα ακτίνας α είναι περιγεγραμμένος κύλινδρος και εγγεγραμμένος κώνος που η ακμή του είναι ίση με τη διάμετρο της βάσης του. Να υπολογισθούν οι όγκοι κώνου και κυλίνδρου.

Λύσεις των Δραστηριοτήτων - Εργασιών

1η Δραστηριότητα § 13.4

i) Έστω ΑΒΓΔ – Α΄Β΄Γ΄Δ΄ (πλάγιο) τετραγωνικό πρίσμα με βάση τυχαίο τετράπευρο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε τις διαγωνίους ΑΓ΄ και Α΄Γ του πρίσματος. Από το παραλληλόγραμμο ΑΑ΄Γ΄Γ προκύπτει ότι τα τμήματα ΑΓ΄ και Α΄Γ είναι διαγώνιοι και διχοτομούνται στο σημείο $Μ_1$. Η ευθεία που διέρχεται από το $Μ_1$ και είναι παράλληλη στις ΑΑ΄ και ΓΓ΄ τέμνει τις ΑΓ και Α΄Γ΄ στα μέσα τους Μ και Μ΄ αντίστοιχα.

Για τον ίδιο λόγο, οι διαγώνιοι ΔΒ΄ και Β΄Δ τέμνονται στο σημείο $Ν_1$ και η ευθεία που διέρχεται από το N_1 και είναι παράλληλη στις ΔΔ΄ και ΒΒ΄ διχοτομεί τις ΔΒ και Δ΄Β΄ στα σημεία Ν και Ν΄ αντίστοιχα.



ii) Επειδή, όμως, οι παράπλευρες ακμές του πρίσματος είναι παράλληλες και ίσες μεταξύ τους, τα τμήματα ΜΜ΄ και ΝΝ΄ είναι επίσης παράλληλα και ίσα με αυτές. Άρα το ΜΝΝ΄Μ΄ είναι παραλληλόγραμμο και το τμήμα M_1N_1 είναι ίσο και παράλληλο με τα ΜΝ και Μ΄Ν΄, επειδή τα M_1 και N_1 είναι μέσα των πλευρών ΜΜ΄και ΝΝ΄αντίστοιχα.

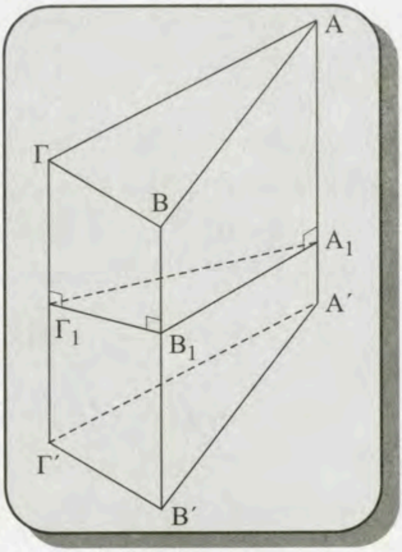
iii) Για να είναι παραλληλεπίπεδο ένα τετραγωνικό πρίσμα πρέπει όλες οι έδρες του να είναι παραλληλόγραμμα. Οι παράπλευρές έδρες είναι παραλληλόγραμμα, επομένως πρέπει και οι βάσεις ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ να είναι παραλληλόγραμμα. Τότε, όμως, οι διαγώνιοι των βάσεων διχοτομούνται και άρα τα σημεία Μ και Ν καθώς επίσης και τα Μ΄και Ν΄ ταυτίζονται με το κοινό σημείο των διαγωνίων των βάσεων. Τότε και τα σημεία M_1 και N_1 ταυτίζονται και οι διαγώνιοι του παραλληλεπιπέδου διέρχονται από ένα σημείο και διχοτομούνται.

2η Δραστηριότητα § 13.4

Έστω ΑΒΓ–Α΄Β΄Γ΄ ένα τυχαίο τριγωνικό πρίσμα και $A_1B_1\Gamma_1$ μία κάθετη τομή του.

i) Αν οι έδρες ΑΒΒ΄Α΄ και ΑΓΓ΄Α΄ είναι ίσες, τότε επειδή είναι παραλληλόγραμμα θα έχουν ίσα ύψη, άρα $A_1B_1 = A_1\Gamma_1$. Τότε το τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ ως ισοσκελές έχει τις γωνίες $\hat{B}_1$ και $\hat{\Gamma}_1$ ίσες. Αλλά οι $\hat{B}_1$ και $\hat{\Gamma}_1$ είναι οι αντίστοιχες επίπεδες των διέδρων ΒΒ΄(A_1,Γ_1) και ΓΓ΄(A_1,B_1). Επομένως οι δίεδρες είναι ίσες.

ii) Αν όμως οι έδρες ΑΒΒ΄Α΄ και ΑΓΓ΄Α΄ είναι άνισες και θεωρήσουμε ότι η πρώτη είναι μεγαλύτερη από τη δεύτερη, τότε ομοίως άνισα είναι και τα ύψη τους, δηλαδή $A_1B_1 > A_1\Gamma_1$. Τότε στο τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ απέναντι άνισων πλευρών βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες, άρα $\hat{\Gamma}_1 > \hat{B}_1$. Επομένως και οι δίεδρες γωνίες είναι όμοια άνισες με τις απέναντι έδρες.



iii) Τέλος, το εμβαδόν κάθε έδρας ισούται με το γινόμενο της παράπλευρης ακμής α επί την απόσταση μεταξύ των ακμών. Έχουμε λοιπόν:

$$\text{εμβ}(ABB'A') = AA' \cdot A_1B_1 = \alpha \cdot A_1B_1 \text{ και}$$

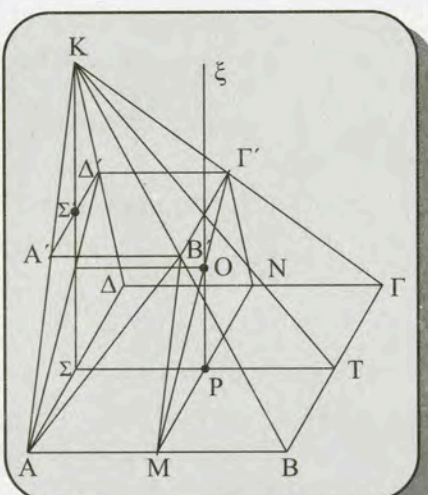
$$\text{εμβ}(A\Gamma\Gamma'A') + \text{εμβ}(B\Gamma\Gamma'B') = AA' \cdot A_1\Gamma_1 + \Gamma\Gamma' \cdot \Gamma_1B_1 =$$

$$\alpha \cdot (A_1\Gamma_1 + \Gamma_1B_1).$$

Αλλά από το τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ έχουμε: $A_1B_1 < A_1\Gamma_1 + \Gamma_1B_1$, επομένως ισχύει: εμβ(ΑΒΒ΄Α΄) < εμβ(ΑΓΓ΄Α΄)+εμβ(ΒΓΓ΄Β΄).

3η Δραστηριότητα § 13.4

i) Το τρίγωνο ΚΑΔ είναι ισόπλευρο και έστω ΚΣ το ύψος του. Θεωρούμε επίσης ΣΤ//ΔΓ. Το επίπεδο (Κ, Σ, Τ) είναι κάθετο στην ΑΔ διότι ΣΤ⊥ΑΔ ως παράλληλη στην ΓΔ και ΚΣ⊥ΑΔ ως ύψος του ισόπλευρου τριγώνου ΚΑΔ. Επομένως η γωνία $K\hat{\Sigma}T$ είναι η αντίστοιχη της δίεδρης ΑΔ(Κ, Γ). Όμως η ΣΤ είναι ορθογώνια στις ΚΑ και ΚΔ ως παράλληλη των ΑΒ και ΓΔ, άρα η ΤΣ είναι κάθετη στο επίπεδο (Κ, Α, Β), επομένως και στην ΚΣ.



ii) Στο τρίγωνο ΚΑΒ έχουμε $\hat{A} = 1\llcorner$ και ΑΚ = ΑΒ = α. Επομένως το ύψος ΑΒ΄ είναι και διάμεσος, δηλαδή $KB' = B'B = AB' = \alpha\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Το επίπεδο που είναι παράλληλο στη βάση ΑΒΓΔ και διέρχεται από το Β΄ τέμνει τις ακμές ΚΓ, ΚΔ, ΚΑ και την ΚΣ στα σημεία Γ΄, Δ΄, Α΄ και Σ΄ αντίστοιχα, που είναι μέσα των τμημάτων αυτών. Επομένως οι πυραμίδες Κ.ΑΒΓΔ και Κ.Α΄Β΄Γ΄Δ΄ έχουν βάσεις τετράγωνα με πλευρές α και $\frac{\alpha}{2}$ και ύψη $K\Sigma = \alpha\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $K\Sigma' = \alpha\frac{\sqrt{3}}{4}$. Έχουμε λοιπόν:

$$\text{ογκ}(K.AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{3}\cdot\alpha^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}\alpha^3 \quad \text{και}$$

$$\text{και ογκ}(K.A'B'\Gamma'\Delta') = \frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha^2}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{48}\alpha^3.$$

$$\text{Άρα ογκ}(AB\Gamma\Delta\text{–}A'B'\Gamma'\Delta') = \frac{\sqrt{3}}{6}\alpha^3 - \frac{\sqrt{3}}{48}\alpha^3 = \frac{7\sqrt{3}}{48}\alpha^3.$$

iii) Γνωρίζουμε ότι τέσσερα σημεία ορίζουν μία σφαίρα μόνο. Η πυραμίδα Κ.ΑΒΓΔ έχει πέντε κορυφές. Επειδή όμως η βάση είναι τετράγωνο αυτό είναι πάντοτε εγγράψιμο σε κύκλο. Στο κέντρο Ρ του τετραγώνου φέρουμε ευθεία ξ κάθετη στο επίπεδο της βάσης. Φέρουμε επίσης το μεσοκάθετο επίπεδο στο τμήμα ΚΔ, που τέμνει την ευθεία ξ στο σημείο Ο, το κέντρο της σφαίρας. Το μεσοκάθετο επίπεδο στο ΚΔ διέρχεται από το μέσο Δ΄ και περιέχει την ευθεία Δ΄Γ΄, τη διάμεσο ΑΔ΄ και τη ΜΓ΄. Επίσης η ευθεία ξ είναι παράλληλη στην ΚΣ. Επομένως έχουμε:

$$PO = \frac{1}{3}K\Sigma = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}\alpha.$$

Η ακτίνα της σφαίρας είναι:

$$\rho = \sqrt{AP^2 + PO^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^2}{12}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}\alpha^2$$

$$\text{Άρα } E = 4\pi\rho^2 = 4\pi\cdot\frac{7}{4\cdot 3}\alpha^2 = \frac{7}{3}\pi\alpha^2$$

$$\text{και } V = \frac{4}{3}\pi\rho^3 = \frac{4}{3}\pi\,\frac{7\sqrt{7}}{24\sqrt{3}}\alpha^3 = \frac{7\sqrt{7}}{18\sqrt{3}}\pi\alpha^3.$$

Παράρτημα

Γεωμετρίας εγκώμιον

(Ομιλία του καθηγητή Ε. Αγγελόπουλου στο Συνέδριο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας)

Όταν κανείς αρχίζει και βγάζει ένα λόγο επιχειρηματολογώντας υπέρ ή κατά κάποιου, συνηθίζουμε να δίνουμε περισσότερη βάση (και καλώς ίσως) στο γιατί λέει αυτά που λέει, παρά στο τι λέει. Αισθάνομαι λοιπόν καταρχήν υποχρεωμένος να δηλώσω τα κίνητρά μου, δηλαδή για ποιο λόγο θα τοποθετηθώ υπέρ της Γεωμετρίας.

Πρώτα - πρώτα γιατί μ' αρέσει η Γεωμετρία. Δε νομίζω ότι αυτό χρειάζεται παραπέρα εξήγηση.

Δεύτερο γιατί αρνούμαι να υποστώ τη μοίρα των δεινοσαύρων. Αυτό χρειάζεται κάποια εξήγηση. Διδάσκω Μαθηματικά και παρατηρώ ότι στους φοιτητές μου, τόσο στους πρωτοετείς, τους νεοεισερχόμενους από τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, όσο και στους μεταπτυχιακούς, που έχουν ολοκληρώσει ένα μαθηματικό ας πούμε κύκλο ή και ένα κύκλο σπουδών μηχανικού, υπάρχει μια έλλειψη κοινής γλώσσας, κοινού υπόβαθρου. Σ΄αυτούς, τα γεωμετρικά σχήματα με τα οποία οι παλαιότεροι από μας έχουν - για να χρησιμοποιήσω έναν ευγενικό όρο - γαλουχηθεί, δεν τους λένε και πολλά πράγματα. Δεν αποτελούν γι αυτούς, αυτό το οποίο ο Kuhn αποκαλεί "επιστημολογικό παράδειγμα". Και σα δάσκαλος, θέλω να έχω ένα κοινό πλαίσιο επικοινωνίας με τους φοιτητές μου, θέλω να έχω το ίδιο πολιτισμικό υπόβαθρο, θέλω αυτά τα οποία τους λέω να τα καταλαβαίνουν με τις ίδιες προσλαμβάνουσες με μένα.

Επομένως, ο λόγος που θα βγάλω έχει μέσα του μια ιδιοτέλεια. Έχει μία υποκειμενικότητα. Από κει και πέρα, έχοντας δώσει τα κίνητρά μου, οτιδήποτε πω και η οποιαδήποτε επιχειρηματολογία μου, μπορεί μεν να πηγάζει από ιδιοτέλεια, αλλά η όποια αξία της έγκειται στο κατά πόσο αυτή την ιδιοτέλεια, αυτή την υποκειμενικότητα, την ξεπερνάει.

Θα αρχίσω λοιπόν με κάτι που είχα πει κάποτε σε συμμαθητές μου, όταν είχα φύγει για πρώτη χρονιά μετά το Γυμνάσιο (το τότε εξατάξιο Γυμνάσιο, σε αντιστοιχία με το σημερινό Λύκειο), στη Γαλλία, όπου είχα ανακαλύψει την Αναλυτική Γεωμετρία σε αρκετό βάθος, όπως διδασκότανε τότε. Και γελώντας είχα πει, όταν μου λέγανε "τι κάνετε; Γεωμετρία. Τριγωνομετρία;", είχα πει: "Δεν υπάρχει Γεωμετρία, ούτε Τριγωνομετρία, όλα είναι συναρτήσεις".

Για να σταθώ λιγάκι σ' αυτό, υπό κάποια έννοια το ασπάζομαι ακόμα και σήμερα. Υπό κάποια έννοια, γιατί; Γιατί από την εποχή του Hilbert και μετά έχει αποδειχθεί ότι η Γεωμετρία, η κλασική τουλάχιστον Γεωμετρία, είναι ισοδύναμη με τη μελέτη των ιδιοτήτων ορισμένων υποσυνόλων του τρισδιάστατου χώρου R^3 ή του δισδιάστατου, αν μιλάμε για επιπεδομετρία, R^2. Τα πάντα μπορούν να εκφραστούν συνολοθεωρητικά. Τα πάντα μπορούν να εκφραστούν υπό μορφή συναρτήσεων. Επομένως και η Γεωμετρία επίσης. Άρα, όντως δεν υπάρχει Γεωμετρία, υπάρχουν Συναρτήσεις. Ναι.

Επιπλέον, η Αναλυτική Γεωμετρία, την οποία τότε είχα πρωτοανακαλύψει, τι κάνει; Μας απαλλάσσει από την τυραννία των σχημάτων: Αν έχεις να εξετάσεις αν οι γωνίες είναι οξείες ή αμβλείες, δεν έχεις παρά να εφαρμόσεις τους τύπους και αυτό το οποίο σου βγαίνει, ένα + ή ένα - στο συνημίτονο καθορίζει το είδος της γωνίας. Από κει και πέρα, αλγεβρικά το συν και το πλην είναι της ίδιας μορφής, οπότε συν μία παράσταση, μείον μία παράσταση, είναι πάντα μία παράσταση. Και επομένως δεν έχεις πρόβλημα.

Απαλλαγήκαμε λοιπόν από την τυραννία των σχημάτων. Τι μένει όμως; Μένει το ερώτημα: Μπορεί κανένας να κάνει την οικονομία των σχημάτων;

Εδώ υπάρχει μία ιστορική πορεία, η οποία πάλι από τη Γαλλία ξεκίνησε. Έχω πολλά υπέρ της Γαλλίας, αλλά έχω και ορισμένα εναντίον της. Το 1966 έγινε στην πόλη Caen της Γαλλίας ένα συνέδριο, όπου είπαν: "*Είναι καιρός επιτέλους τα μοντέρνα Μαθηματικά, τα οποία από την εποχή του Cantor μέχρι σήμερα - μέχρι τότε δηλαδή, το 1966 - έχουν πάρει μια βασική υπόσταση και διέπουν όλη μας τη δουλειά ως μαθηματικών, αυτών που παράγουμε Μαθηματικά, να μπουν από νωρίς στο σχολείο*". Και αρχίσαμε από τότε μία πορεία η οποία έφερε τη Θεωρία Συνόλων στην πρώτη Δημοτικού, αν όχι στο Νηπιαγωγείο, και η οποία μεταξύ άλλων άδειασε την Ευκλείδεια Γεωμετρία από τα εκπαιδευτικά προγράμματα. Οι Γάλλοι βέβαια, μέσα σε αυτή την τριακονταετία, έκαναν διάφορες μεταρρυθμίσεις, με πολλές διορθωτικές αλλαγές σε ορισμένα πράγματα που ήταν ολέθρια. Αλλά πέρα από αυτό, το γενικό κλίμα της εποχής ήταν το εξής: Έβλεπες το φοβερό καθηγητή Τάδε - ονόματα μη λέμε - ο οποίος έγραφε στον πίνακα τύπους, χωρίς κανένα σχήμα. Σε μια στιγμή είχε κάποια αμφιβολία. Γύρναγε την πλάτη του στο ακροατήριο, σχημάτιζε κρυφά στον πίνακα ένα μικρό σχηματάκι, να δει αν το σημείο θα πέσει μέσα ή έξω από την έλλειψη, ούτως ώστε να βάλει θετικό ή αρνητικό πρόσημο στην αντίστοιχη παράσταση. Το έσβηνε, για να μην το δουν. Και γύριζε και έβαζε στον τύπο το σωστό πρόσημο. Τα σχήματα είχαν εξοβελιστεί.

Τι σημαίνει αυτό; Σημαίνει ότι λείπει πλέον το παράδειγμα, το πλαίσιο αναφοράς της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τους Μαθηματικούς, για δεκαετίες θα έλεγα. Δεν είναι πλέον κοινός τόπος, για τους νέους Μαθηματικούς.

Και εδώ επισημαίνω το πρώτο βασικό λογικό άλμα : **Είναι άλλο πράμα να ξεπεράσεις την τυραννία των σχημάτων και άλλο πράμα να εγκαταλείψεις τα σχήματα χωρίς να τά 'χεις διδαχτεί ποτέ.** Γιατί η εγκατάλειψη της τυραννίας των σχημάτων σημαίνει ότι διαθέτεις ισχυρότερες μεθόδους, με τις οποίες μπορείς να τα ταξινομήσεις, να τα μελετήσεις, να δεις τις ιδιότητες που σε ενδιαφέρουν. Να δεις καινούργιες ιδιότητες τις οποίες δεν υποπτευόσουν πριν, και άλλα πολλά. Δε σημαίνει εγκατάλειψη των σχημάτων. Άλλο το ένα, άλλο το άλλο.

Θα προχωρήσω, λοιπόν, έχοντας αυτό ως πρώτο δεδομένο.

Για να μιλήσω τώρα παραπέρα για το ρόλο της Γεωμετρίας, θα δώσω καταρχήν ένα πρόχειρο ορισμό. Έναν ορισμό, ο οποίος αξίζει ό,τι αξίζει: δεν διεκδικώ καμία επιστημολογική ανακάλυψη με αυτόν, αλλά το κάνω για λόγους ευχρηστίας στα πλαίσια αυτής της ομιλίας.

Καλώ Γεωμετρία τον κλάδο των Μαθηματικών ο οποίος μελετά το χώρο, τα σχήματα, τις σχέσεις μεταξύ των σχημάτων, τις μεταβολές των σχημάτων, ενδεχομένως τις μεταβολές στο χρόνο, δηλαδή τις κινήσεις των σχημάτων και τις όποιες γενικεύσεις πηγάζουν από αυτό.

Ένα πρώτο που έχουμε να εξετάσουμε είναι - για να απαντήσουμε στο ερώτημα κατά πόσον είμαι δεινόσαυρος ή όχι, ένα είδος δηλαδή, το οποίο θα εκλείψει με το βιολογικό θάνατο όσων έχουν διδαχτεί Γεωμετρία - να δούμε τις ανάγκες που εξυπηρετεί η Γεωμετρία σε κοινωνικό επίπεδο. Σε επίπεδο, θα έλεγα, κοινωνικής παραγωγής.

Καταρχήν ιστορικά. Όλοι γνωρίζουμε ότι ετυμολογικά Γεωμετρία σημαίνει "μέτρηση της γης". Οι Αιγύπτιοι είχαν ανάγκη από Γεωμετρία, γιατί πλημμύριζε ο Νείλος και έπρεπε να ξανακατανείμουν τα χωράφια τους κάθε φορά. Η Γεωμετρία αναπτύχθηκε από τους αρχαίους Έλληνες, αναπτύχθηκε στην τεχνολογία της αρχαιότητας με τη μελέτη διαφόρων επιφανειών, καμπυλών, που εξυπηρετούσαν και πολύ τεχνικά προβλήματα, όπως οι αντλίες π.χ. με τους έλικες, η όλη στατική. Ακόμα εξυπηρετούσε τις ανάγκες της Αστρονομίας. Υπήρχαν κανόνες, και όλο το Πτολεμαϊκό σύστημα βασίζεται στους κανόνες ότι όλες οι τροχιές πρέπει να παράγονται από κύκλους. Δυστυχώς οι τροχιές δεν ήταν (και δεν είναι) κύκλοι. Για να εξηγηθούν, επομένως, οι τροχιές των πλανητών, εφευρέθηκε ολόκληρο το σύστημα των κύκλων και των επικυκλίων, διότι η Αστρονομία ήταν κάτι, το οποίο έμπαινε σαφώς μέσα στην κοινωνική οργάνωση. Χωρίς αυτό να αποκλείει βέβαια ότι και το ηλιοκεντρικό σύστημα αναπτύχθηκε εκείνη την εποχή - και κατά τύχη (;) κάηκαν τα γραπτά του Αρίσταρχου του Σάμιου, ο οποίος το είχε διατυπώσει - αλλά αυτό είναι μια άλλη ιστορία.

Αυτό συνεχίζει. Όλη αυτή η παράδοση ξεπερνά την αρχαία Ελλάδα, η όλη γεωμετρική γνώση, η οποία είναι στην ουσία ταυτόσημη με τη Φυσική, με την έννοια της Μηχανικής. Αναπτύσσεται και με τη βοήθεια του Απειροστικού Λογισμού και με τις νέες ανάγκες οι οποίες υπάρχουν, τη μελέτη των τροχιών, τη βλητική, τα τηλεσκόπια, όλα αυτά. Η Γεωμετρία είναι μέσα στην επιστημονική, στην τεχνολογική παραγωγή. Για να μη μιλήσουμε και για την καθημερινή ζωή.

Μπορούμε να πούμε ότι η Φυσική αποδεσμεύεται από τη Γεωμετρία με την εμφάνιση των νέων μορφών ενέργειας - νέων για την εποχή εκείνη, του ατμού, του ηλεκτρισμού κτλ. Παρόλα αυτά, ακόμα και σήμερα, στην Κβαντική Φυσική π.χ., η οποία είναι και το πιο προχωρημένο, ας πούμε, στάδιο της Φυσικής, τουλάχιστον ως προς τη μελέτη σε βάθος της δομής της ύλης, μιλάμε για τροχιές ηλεκτρονίων, παρόλο που δεν υπάρχει η δυνατότητα εντοπισμού του ηλεκτρονίου: οι τροχιές δεν είναι τροχιές με την ακριβή έννοια. Τι είναι; Είναι μια αναλογία, δανεική από τη Γεωμετρία, η οποία χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα. Γιατί; Γιατί η Γεωμετρία είναι το κατεξοχήν επιστημολογικό παράδειγμα, το παράδειγμα αναφοράς, το οποίο μπορείς να το ξεπεράσεις με την έννοια των κυματοσυναρτήσεων, αλλά το οποίο σου δίνει μια προεικόνα έστω και αναλογική. Επομένως το λεξιλόγιο παραμένει δάνειο από τη Γεωμετρία.

Ας δούμε τώρα τις ανάγκες που καλύπτει σήμερα η Γεωμετρία. Μπορούμε να πούμε πρώτα απ' όλα, ότι υπάρχει μια υποχώρηση των καθαρά γεωμετρικών τεχνικών, π.χ. των αναλογικών μεθόδων. Ένα από τα πιο τρανταχτά παραδείγματα είναι ότι πριν από 25 χρόνια οι μηχανικοί κυκλοφορούσαν με τον λογαριθμικό κανόνα στην τσέπη. Από τη στιγμή που βγαίνουν τα ηλεκτρονικά μηχανάκια τσέπης, πέφτει σε αχρηστία η αναλογική μέθοδος, γιατί το ψηφιακό σύστημα σου δίνει όσα ψηφία θέλεις. Το ίδιο συμβαίνει με τα ρολόγια. Μπορεί να υπάρχουν ακόμα ρολόγια τα οποία μιμούνται σε σχήμα τα παλαιού τύπου ρολόγια, αλλά είναι ψηφιακά. Οι μηχανισμοί των οδοντωτών τροχών δεν υπάρχουν ή υπάρχουν μόνο σαν αντικείμενα συλλογής και όχι σαν αντικείμενα καθημερινής χρήσης. Και έχει καταργηθεί ακόμα και το σχήμα : γράφοντας ψηφιακά την ώρα 08.43 δε χρειάζονται πια οι βελόνες που κυνηγούν η μια την άλλη.

Από την άλλη μεριά, βέβαια, παραμένει η Γεωμετρία οπουδήποτε υπάρχουν κατασκευές. Παραμένει και πιο ανεπτυγμένη. Δηλαδή, από τα απλά σπίτια, τις παραλληλεπίπεδες πολυκατοικίες, στις οποίες δεν μπορεί κανείς να μην αναγνωρίσει ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων (είναι μέσα στη ζωή μας το τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων, γιατί όλοι ζούμε ανάμεσα σε τοίχους, ταβάνια και πατώματα), ως τις κατασκευές γεφυρών ή palais de sport, όπου υπάρχουν κρεμαστές καμπύλες ή παραβολικά υπερβολοειδή ως οροφές, πάλι υπάρχει η έννοια της Γεωμετρίας τουλάχιστον ως εφαρμογή. Βέβαια, όπως σε κάθε εποχή, όλα αυτά γίνονται με τις ακριβέστερες διαθέσιμες μεθόδους : δηλαδή σήμερα με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών - και όχι πια με κανόνα και διαβήτη, τις ακριβέστερες για την αρχαιότητα.

Υπάρχει και ένα άλλο στοιχείο στη σημερινή εποχή. Υπάρχει η εισβολή της εικόνας. Στην εικόνα υπάρχουν σχήματα, η εικόνα η ίδια ειναι γεωμετρικό αντικείμενο. Στα τηλεοπτικά κανάλια π.χ. βλέπει κανένας όχι απλώς το λογότυπο του καναλιού, αλλά βλέπει πώς έρχονται τα γράμματα ένα-ένα στοβιλιζόμενα και τοποθετούνται στη θέση τους. Πράγμα που προϋποθέτει ένα πρόγραμμα, που να έχει ενσωματώσει τις καθαρά γεωμετρικές έννοιες της προοπτικής των γραμμάτων, τα οποία κοιτάζει κανείς από λοξά, στριφογυρίζουνε, και κάθονται ως Ε, Ρ κτλ. Άρα, χρησιμοποιείται και εκεί η Γεωμετρία. Γιατί από τη στιγμή που υπάρχει επεξεργασία της εικόνας, όσο κι αν αυτή η επεξεργασία γίνεται ψηφιακά, προϋπάρχουν οι κανόνες της Προβολικής Γεωμετρίας, οι οποίες τη διέπουν.

Επομένως και σήμερα στην κοινωνική παραγωγή η Γεωμετρία είναι απαραίτητη. Παρόλο, δηλαδή, που ορισμένες τεχνικές της Γεωμετρίας έχουν υποχωρήσει, ο χειρισμός - η χαλιναγώγηση θά 'λεγα - του χώρου, των σχημάτων, των κινήσεων, είναι βασικό γνώρισμα της σημερινής τεχνολογίας, είναι βασικό γνώρισμα της σημερινής κοινωνικής παραγωγής.

Έχει ανάγκη η κοινωνία από τη Γεωμετρία.

- Ας περάσουμε τώρα στο ατομικό επίπεδο : Τι είναι για τον κάθε άνθρωπο η Γεωμετρία;

  Η Γεωμετρία καταρχήν προϋπάρχει ως υπόβαθρο. Κινούμαστε ως έμβια όντα μέσα στο χώρο των τριών διαστάσεων, έχουμε επομένως δοσοληψίες μαζί του, όπως και με όλο μας το περιβάλλον : δεχόμαστε επιδράσεις απ΄αυτό και με τη σειρά μας επιδρούμε πάνω του. Και ως όντα λογικά, σκεφτόμαστε και κατανοούμε (ή τουλάχιστον προσπαθούμε) το περιβάλλον και τη σχέση μας μ'αυτό - άρα και με το χώρο.

  Σε κάθε άτομο, η σχέση με το χώρο βιώνεται απο πολύ νωρίς, απο τη βρεφική κιόλας ηλικία. Είναι αρκετά γνωστά, και στους μή ειδικούς όπως εγώ, τα αποτελέσματα του Piaget, που εξετάζουν την όλη εξοικείωση με το χώρο: σε μια πρώτη φάση στο αισθητικο-κινητικό επίπεδο, σε μια δεύτερη στο συνειδητό επίπεδο. Δηλαδή, πριν το παιδί κάνει λογικές σκέψεις, την αίσθηση του χώρου την έχει. Από ένα σημείο και πέρα, τα ερεθίσματα αυτά εισρέουν στον εγκέφαλο και σχηματίζουν νοητικές κατηγορίες. Τις έννοιες του μέσα και του έξω κτλ. Υπάρχει κι ένα τρίτο στάδιο στο οποίο προχωράμε. Είναι η οργάνωση των εννοιών ως προς τις διαπλοκές που έχουν μεταξύ τους. Απ' όσο γνωρίζω τουλάχιστον, σε όλες τις γλώσσες υπάρχουν έννοιες και συλλογισμοί που αφορούν το χώρο, σε όλες τις γλώσσες επίσης υπάρχει λογική δομή. Και κατά μία άποψη, δεν είναι τυχαίο ότι, επειδή έχουμε ως ανθρώπινα όντα αυτές τις ιδιότητες, η Γεωμετρία ήταν και ο πρώτος κλάδος γνώσης, ο οποίος οργανώθηκε επιστημονικά.

- Θέλω λοιπόν τώρα να εξετάσω λιγάκι τι σημαίνει Γεωμετρία ως επιστήμη. Και πάλι θα δώσω ένα πρόχειρο ορισμό, λειτουργικό, για τα πλαίσια αυτής της ομιλίας. Θεωρώ επιστήμη ένα οργανωμένο σύστημα γνώσεων, **το οποίο είναι πρώτα - πρώτα ανεξάρτητο από τον φέροντα**. Είναι δηλαδή μεταδόσιμο, είναι κάτι το οποίο δεν έχει να κάνει με την κοινωνική θέση, στο ιερατείο π.χ. αυτού ο οποίος εκφέρει την γνώση ή το αποτέλεσμά της, αλλά είναι κάτι το οποίο ο καθένας μπορεί, έχει τα φόντα, με την κατάλληλη προσπάθεια, μελέτη κτλ., να οικειοποιηθεί.

  Δεύτερο, πρέπει να έχει μία λογική συνοχή. Πρέπει να είναι σε θέση να διατυπώνει προβλήματα στα οποία να υπάρχει η δυνατότητα της απάντησης του τύπου ναι, όχι, δεν ξέρω, δεν είναι δυνατόν να υπάρχει απόδειξη, το πρόβλημα δεν είναι σωστά διατυπωμένο κτλ.

  Και τρίτον, πρέπει να υπάρχει επίγνωση του αντικειμένου με το οποίο ασχολείται: Ποια ερωτήματα μπορούν να τεθούν μέσα στο σύστημα, ποια όχι, και ποια είναι οριακά.

  Αν κοιτάξουμε κάτω από αυτό το πρίσμα τη Γεωμετρία, από τη στιγμή που το αντικείμενο με το οποίο ασχολείται είναι κοινό υπόβαθρο πολιτισμικό, θάναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι, αν όχι η πρώτη, τουλάχιστον μέσα στους πρώτους επιστημονικούς κλάδους που έμελλε να αναπτυχθούν, θα 'ταν η Γεωμετρία.

Και αρχίζουμε από τον Ευκλείδη. Το βασικό πρόβλημα στον Ευκλείδη είναι η διατύπωση του θεωρητικού συστήματος. Ήδη ήταν γνωστά σκόρπια πράγματα. Το καινούργιο στα Στοιχεία του Ευκλείδη είναι: τι, βάσει τίνος; Τι είναι τα αξιώματα και τι είναι τα θεωρήματα. Τι βάζουμε στην αρχή και τι βάζουμε στο τέλος.

Πολλά μπορεί να πει κανείς για τα Στοιχεία, και πολλά έχουν ειπωθεί. Υπάρχουν πράγματα μέσα, τα οποία όντως σηκώνουν κριτική. Π.χ. ο ορισμός της ευθείας είτε δοθεί είτε δε δοθεί, δεν έχει καμιά σημασία, διότι δεν παρεμβαίνει καθόλου μετέπειτα. Έχουμε πάντως εκεί πέρα το πρώτο αξιωματικό σύστημα μέσα στα Μαθηματικά, το οποίο ήταν και το μόνο μέχρι πριν από 200 χρόνια περίπου που άρχισε να γίνεται συστημα-τοποίηση και σε άλλους κλάδους.

Το τι, βάσει τίνος, είναι το ένα. Από κει και πέρα είναι το **"τι είναι μετά"**. Γιατί είναι τόσα πολλά τα προβλήματα τα οποία γεννιούνται από την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος, είναι άπειρος ο πλούτος των ερωτημάτων τα οποία μπορούν να τεθούν και έχουμε όλη την πορεία από την κατασκευή των κανονικών πολυέδρων, στα οποία καταλήγουν τα Στοιχεία του Ευκλείδη, μέχρι την μελέτη π.χ. των ολόμορφων πολλαπλοτήτων και πολλά άλλα : δεν έχει νόημα να κάνουμε μιαν απαρίθμηση αυτή τη στιγμή.

Η ουσία είναι ότι ανάμεσα στα καινούργια ερωτήματα, που ξεφυτρώνουν σαν τα κεφάλια της Λερναίας Ύδρας, υπάρχουν και μερικά τα οποία υπερβαίνουν τα αρχικά δεδομένα, οδηγούν σε κατασκευή νέων νοητικών κατηγοριών. Αυτό που αποκαλούμε "πρόοδο" με την καλώς εννοούμενη έννοια της λέξης.

Θα δώσω ορισμένα τέτοια παραδείγματα. Ένα από αυτά είναι *η θεωρία των λόγων του Ευδόξου*, που οδηγεί στον απειροστικό λογισμό και η οποία, διατυπωμένη σε σύγχρονη Μαθηματική γραφή, δεν είναι τίποτε άλλο παρά ειδικές ακολουθίες Cauchy, οι οποίες συγκλίνουν από πάνω και από κάτω σε μη ρητούς λόγους, δηλαδή σε πραγματικούς αριθμούς.

Υπάρχει *το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη* και όλη η προσπάθεια που έγινε για την απόδειξη ή την αναίρεση της ύπαρξης μιας μοναδικής παραλλήλου, το οποίο οδηγεί σε χιλιάδες πράγματα. Οδηγεί καταρχήν στην απαλλαγή της Γεωμετρίας (και των Μαθηματικών γενικότερα) από το υλικό υπόβαθρο από το οποίο ξεκίνησε, στον απογαλακτισμό - ή την ενηλικίωσή της.

Μέχρι τότε η Γεωμετρία ήταν συνδεδεμένη με τη μέτρηση των επιφανειών, των όγκων κτλ. Από κει και πέρα, παύει νάναι, παρόλο που ο Alexandroff π.χ. σε μια προσπάθεια υποστήριξης της Γεωμετρίας του Lobachevsky (σε ένα βιβλίο που έχει μεταφραστεί στα ελληνικά), μέσα σε όλα τ'άλλα, δίνει το επιχείρημα ότι όντως η Γεωμετρία του Lobachevsky ίσως είναι καλύτερη σε κοσμολογικό επίπεδο για την περιγραφή του Σύμπαντος, γιατί το Σύμπαν έχει καμπυλότητα. Μα δεν είναι αυτό το οποίο παίζεται! Η Γεωμετρία του Lobachevsky είναι ορθή. Υπάρχει μαθηματικό μοντέλο το οποίο την υλοποιεί, δεν είναι δηλαδή κενή περιεχομένου κι αυτό αρκεί. Το αν ταιριάζει καλύτερα στη δομή του Σύμπαντος, δεν αποτελεί δικαιολογία για την ύπαρξή της - είναι απλώς ένα κίνητρο για κάποιον ν' ασχοληθεί μαζί της.

Από ένα σημείο και έπειτα, από τη χειραφέτηση των Μαθηματικών από την εφαρμογή τους, η εφαρμογή δεν αποτελεί δικαιολογία. Βέβαια πάνω σε αυτό υπάρχει και η γνωστή ρήση του Hilbert ότι *"δεν με ενδιαφέρει αν μιλάμε για τραπέζια, καρέκλες και ποτήρια μπύρας ή επίπεδα, ευθείες και σημεία, φτάνει αυτό το οποίο λέμε να έχει λογική συνοχή"*. Είναι η κυρίαρχη σήμερα σκέψη στα Μαθηματικά. Από κει και πέρα, όποιος θέλει παίρνει το μοντέλο και το εφαρμόζει.

Βέβαια αυτή τη φοβερή - φοβερή με όλες τις έννοιες της λέξης - συμβολή της Γεωμετρίας στη χειραφέτηση των Μαθηματικών, την πληρώνει η ίδια. Την πληρώνει διότι παύει να υπάρχει ως αυτόνομος κλάδος, διότι δεν ενδιαφερόμαστε για τις επιφάνειες, ενδιαφερόμαστε πλέον για τα υποσύνολα του R^3, όπως είχαμε πει στην αρχή, χωρίς βέβαια να δίνουμε απάντηση στο γιατί ενδιαφερόμαστε γιαυτά τα συγκεκριμένα υποσύνολα τα οποία αντιστοιχούν σε επιφάνειες. Αυτό δεν είναι μαθηματικό θέμα να απαντηθεί : είναι μετα-μαθηματικό…

Θα μπορούσα να αναφερθώ και σ' άλλες περιπτώσεις που ξεπερνούν το αρχικό πρόβλημα. Π.χ. ο τύπος του Euler που συνδέει τις κορυφές, τις έδρες και τις ακμές ενός τυχαίου πολυέδρου, χωρίς όμως να ισχύει πάντα, μετά από διάφορες περιπέτειες καταλήγει στη διατύπωση της Ομολογικής Άλγεβρας από τον Poincare. Δε νομίζω όμως ότι είναι απαραίτητο.

Κι αυτό, επειδή αυτές οι καταστάσεις, των προβλημάτων δηλαδή που ξεπερνούν τα αρχικά δεδομένα, δεν χαρακτηρίζουν μόνο τη Γεωμετρία: σε κάθε κλάδο των Μαθηματικών, και γενικότερα σε κάθε επιστήμη, μπαίνουν κάποτε ερωτήματα τόσο κρίσιμα ώστε να οδηγούν σε ριζική επαναδιατύπωση του θεωρητικού πλαισίου από το οποίο πηγάζουν.

· Θέλω, επομένως, να εξετάσω σε τι διαφοροποιείται η Γεωμετρία μέσα στα Μαθηματικά.

Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά των Μαθηματικών είναι η **γραμμικότητα,** η γραμμικότητα με την έννοια της **διάταξης.** Το κατεξοχήν αντικείμενό τους, οι αριθμοί, ακέραιοι ή πραγματικοί, είναι διατεταγμένο σύνολο. Αλλά και η όλη διατύπωσή τους είναι γραμμική, επειδή γραμμικός είναι ο χρόνος, γραμμικός και ο λόγος, η ομιλία. Κάθε εκφώνηση, κάθε απόδειξη, είναι λέξεις στη σειρά, η μια μετά την άλλη. Ακόμα κι αν υπάρχει συσχέτιση με τα προηγούμενα ή με τα επόμενα, αυτή η γραμμικότητα υπάρχει. Όσα πήγαινε-έλα και να κάνει κανείς σ' έναν πολύπλοκο συλλογισμό, θα τον διατυπώσει γραμμικά, και γραμμικά θα τον διαβάσει ή θα τον ακούσει ο άλλος. Αναγκαστικά.

Και καθώς στα Μαθηματικά εργαλείο και αντικείμενο ταυτίζονται, αυτή η γραμμικότητα χρησιμοποιείται κατά κόρον. Στέλνεις ένα σύνολο, με διάφορους τρόπους, πάνω στους πραγματικούς ή τους ακέραιους αριθμούς, κι απο κεί αντλείς συμπεράσματα για το αρχικό σύνολο. Έτσι παίρνεις, ας πούμε, την έννοια του μέτρου, ή το θεώρημα του Godel.

Ας αναφερθούμε λίγο στο τελευταίο, το θεώρημα δηλαδή που λέει πως μια μαθηματική θεωρία δεν μπορεί να είναι πλήρης. Σχηματικά, μπορούμε να αναγάγουμε τις προτάσεις της θεωρίας, απαριθμώντας τις κατάλληλα, σε κάποια διάταξη των πραγματικών αριθμών και βάσει αυτού να αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας διάφορους κανόνες αυτοαναφοράς (αριθμημένους κι αυτούς), ότι υπάρχει κάποιο θεώρημα το οποίο δεν μπορεί να πει κάτι για τον αριθμό του. Γιατί ειδεμή θα μπαίναμε σε διάφορα διαγώνια λογικά άτοπα.

Επομένως υπάρχει, και χρησιμοποιείται, αυτή η γραμμικότητα. Κι από κει και πέρα ας δούμε πώς αυτή η γραμμικότητα εκφράζεται στην λύση ενός μαθηματικού προβλήματος.

Αυτό που λέω στους φοιτητές μου είναι ότι υπάρχει ένας και μοναδικός τυφλοσούρτης για να λύσω ένα μαθηματικό πρόβλημα : **Τι μας δίνουν, τι μας ζητούν και ποιος είναι ο δρόμος για να πάμε από το ένα στο άλλο.** Φυσικά αυτό δεν είναι τυφλοσούρτης, άμα το κοιτάξει κανένας από πιο κοντά, γιατί έχει να κάνει με πολλές επιλογές. Σημαίνει απλά ότι πρέπει να ξέρουμε τι κάνουμε κάθε φορά.

Το τρίτο σκέλος του τυφλοσούρτη είναι ο δρόμος. Το γραμμικό σκέλος, αυτό είναι ο δρόμος. Ένα παράδειγμα; Μία παραγώγιση μιας πολύπλοκης παράστασης. Τι κάνεις; Χωρίζεις τους όρους. Παραγωγίζεις κάθε προσθετέο, μετά παραγωγίζεις τα γινόμενα, μετά εφαρμόζεις την σύνθεση συναρτήσεων, παραγωγίζεις λογάριθμο του ημιτόνου της τετραγωνικής ρίζας του τάδε κτλ. Στο τέλος, μετά από μια σειρά παιδευτικών πράξεων - ίσως όχι και τόσο παιδευτικών αλλά κοπιαστικών πράξεων - κάπου καταλήγεις.

Σε τέτοιου τύπου προβλήματα, η σειρά με την οποία θα κάνεις τις πράξεις είναι χοντρικά δεδομένη. Τα προβλήματα της Άλγεβρας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι αυτού του τύπου. Ποιες ταυτότητες θα εφαρμόσεις; Είναι γνωστές οι ταυτότητες. Ποια ταιριάζει, ποια δεν ταιριάζει, πώς θα αναπτύξουμε αν είναι να πάμε από γινόμενο σε άθροισμα, από άθροισμα σε γινόμενο κτλ. Η επίλυση είναι σχετικά τυποποιημένη.

Στη Γεωμετρία δεν είναι δεδομένη η διάταξη του τι θα κάνεις. Εάν στρίψεις ένα σχήμα και το μετατοπίσεις μετά, δεν είναι το ίδιο σαν να το μετατοπίσεις πρώτα και να το στρίψεις μετά. Αν θα επιλέξεις από το τάδε ή το τάδε σημείο να φέρεις την κάθετο ή την παράλληλη, δεν είναι δεδομένο του προβλήματος. Πρέπει να στίψεις το μυαλό σου για να το βρεις. Αυτό ήτανε και η κρυφή γοητεία, στο Γυμνάσιο όταν ήμουνα, των ασκήσεων της Γεωμετρίας απέναντι στις ασκήσεις της Άλγεβρας. Ότι η Άλγεβρα, αν ήξερες τους τύπους, έβγαινε. Η Γεωμετρία, ποτέ δεν ήσουν σίγουρος. Και άμα το λύσεις, η απόλαυση είναι μεγαλύτερη. Και η απόλαυση έχει μία αξία, η οποία σε χρήμα δεν αποτιμάται. Έχει μία αξία αυτή καθεαυτή. **Η διάταξη δεν είναι δεδομένη, το μυαλό πρέπει να δουλέψει πιο πολύ.**

Αυτή είναι μία φράση - κλειδί. Και πάνω σε αυτό ορισμένα σχόλια :

Πρώτο σχόλιο: Οι υπολογιστές για να παραστήσουν γεωμετρικά σχήματα καταλήγουν σε ψηφιακές μεθόδους, όπου όλα είναι στη σειρά. Η οθόνη χωρίζεται σε σειρές και κάθε σειρά σε κουκίδες, τα pixel ονομαζόμενα. Εξαντλούμε την πρώτη σειρά, τη δεύτερη σειρά, πάρα πολλές, 1000x1000 κουκίδες ας πούμε, και σχηματίζουμε μία εικόνα pixel προς pixel. Αλλά για να φθάσουμε μέχρι εκεί, το λογισμικό προϋποθέτει γνώση των κανόνων της Γεωμετρίας που χρησιμοποιούνται, για να ξέρεις αν η τάδε κουκίδα θα βγει άσπρη, μαύρη ή κόκκινη ή θ'αναβοσβήνει. Η γραμμικοποίηση δεν είναι τίποτε άλλο παρά μία μετάφραση του σχήματος - της θεωρητικής Γεωμετρικής έννοιας - σε σειρά αριθμών, για να τις διαβάσει ο υπολογιστής και να τις μεταφράσει πάλι σε εικόνα με τη σειρά του. Έχουμε ένα πήγαινε-έλα. Το ψηφιακό επεμβαίνει διότι ο υπολογιστής μόνο ψηφιακά καταλαβαίνει.

Δεύτερο σχόλιο: Ας μου επιτραπεί σχόλιο έξω-μαθηματικό. Έχει να κάνει με την έννοια της διάταξης, βέβαια. Υπάρχει η διάταξη των ακεραίων αριθμών, όπως και των πραγματικών αριθμών. Υπάρχει μία φυσική, δεδομένη διάταξη. Υπάρχει μία ιεραρχία στους αριθμούς.

Υπάρχει επίσης μία ιεραρχία στην κοινωνία, στην όποια κοινωνία, στην κάθε κοινωνία. Υπάρχει μία ιεραρχία. Πρέπει να τη σεβόμαστε αυτή την ιεραρχία. Πρέπει να μην την ανατρέπουμε αυτή την ιεραρχία. Είναι καλύτερο να μαθαίνουμε να σκεφτόμαστε γραμμικά. Να μην περνάμε ανατρεπτικές ιδέες. Να αλλάξουμε τη διάταξη των αριθμών και να βάλουμε το 3 πριν το 2 ! Από πού κι ως πού;

Βέβαια υπάρχει κάποιο παράδοξο σ'αυτή την αναλογία, γιατί κάθε αριθμός έχει ανώτερό του, ενώ κάθε άνθρωπος δεν έχει. Είναι πεπερασμένο το πλήθος των ανθρώπων. Φτάνεις στην κορυφή και πού είναι ο ανώτερος;

Παρόλα αυτά, το ιδεολόγημα δουλεύει. Ποιο ιδεολόγημα, εξάλλου, δείλιασε ποτέ μπροστά σ΄ ενα λογικό παράδοξο; Σκασίλα του!

Ε, λοιπόν, **δεν υπάρχει δεδομένη διάταξη στην Γεωμετρία, γι' αυτό δεν είμαστε δέσμιοι μιας a priori ιεραρχίας.** Την ιεραρχία του προβλήματος την κατασκευάζουμε ανάλογα με τις ανάγκες του προβλήματος. Γι' αυτό, εξωμαθηματικά, σαν πολίτης, η Γεωμετρία μου πάει καλύτερα. Πρώτα θα κοιτάξεις το σημείο Α και μετά το Β. Και αν δεν σε βολεύει θα κοιτάξεις το Β και μετά το Α. Και τελείωσε. Δεν είναι το Α Πρωθυπουργός, το Β αστυνομικός και το Γ οδηγός, ξέρω και εγώ, τρόλεϋ.

· Διατύπωσα, επομένως, ορισμένα πράγματα για τη Γεωμετρία. Ας δούμε τώρα για τη Γεωμετρία στην εκπαίδευση.

Έχουμε δύο πράγματα : την εκπαίδευση που θα διαμορφώσει ειδικούς, επιστήμονες, και την εκπαίδευση των απλών ανθρώπων.

Απ' όσα είπα, για μεν την πρώτη, την εκπαίδευση των επιστημόνων στις θετικές επιστήμες, διατείνομαι ότι το επιστημολογικό παράδειγμα της Γεωμετρίας είναι οικουμενικότερο, ευρύτερο, πλουσιότερο από άλλα. Εμπεριέχει τη διάταξη. Δεν είναι όμως δέσμια της διάταξης. Εμπεριέχει το κοινό υπόβαθρο της ανθρώπινης εμπειρίας : την αίσθηση του χώρου. Παρέχει τις προϋποθέσεις σ' έναν επιστήμονα να οργανώσει τον χώρο ο οποίος τον περιβάλλει σε απλά σχήματα, σε συντεταγμένες κτλ. για να μπορέσει μετά να οργανώσει και την κατασκευή μιας γέφυρας, ενός πυραύλου, ενός αεροπλάνου, στο οποίο υπεισέρχονται παρά πολλά στοιχεία και χρειάζεται μία συνθετική ικανότητα. Η πρώτη συνθετική ικανότητα βγαίνει από τη Γεωμετρία. Ένα το κρατούμενο.

Γιατί όμως ο απλός μαθητής να μαθαίνει για τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα; Αυτό είναι ένα ψεύτικο πρόβλημα. Πολλά τέτοια γιατί μπορεί να υπάρχουν. Γιατί καταρχήν να μαθαίνει για την παράγωγο; Θα του χρειαστεί η παράγωγος στην καθημερινή ζωή; Στην πωλήτρια του super market χρειάζεται να ξέρει να παραγωγίζει; Ούτε το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ούτε η παράγωγος της χρειάζεται.

Αλλά δεν είναι μόνο τα Μαθηματικά που δεν χρειάζονται. Γιατί π.χ. να μαθαίνει το τάδε ποίημα, γιατί να μαθαίνει τον τύπο $CaCO_3$ του ανθρακικού ασβεστίου, γιατί να μαθαίνει τη ναυμαχία του Αρτεμισίου, γιατί να μαθαίνει ποιος ήταν ο Ναρσής (για τον οποίο εξάλλου δεν αναφερόταν ότι ήταν και ευνούχος, πράγμα που θα μπορούσε να γεννήσει και υποψίες : τι ήταν και τι ρόλο είχαν οι ευνούχοι σε εκείνη την κοινωνία;). Γιατί να τα μαθαίνει όλα αυτά; Γιατί υπάρχει εκπαίδευση;

Άρα το ερώτημα είναι γιατί να μαθαίνει το εγγεγραμμένο τετράπλευρο παρά την παράγωγο π.χ., αυτό θα ήταν το σωστό ερώτημα. Νομίζω ότι αυτό απαντήθηκε περίπου: Γιατί η Γεωμετρία ειδικότερα και τα Μαθηματικά γενικότερα, *σωστά διδαγμένα* - και πάλι θα ανοίξω μια τελευταία παρένθεση, θα παραλείψω το ρήμα της φράσης, θα σταματήσω τη φράση μου. Τί εννοώ *σωστά διδαγμένα*;

Τα Μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα είναι επίλυση προβλημάτων. Σε οποιοδήποτε επίπεδο γνώσης και να βρίσκεται ένα άτομο, *όταν κάνει Μαθηματικά,* κάνει έρευνα. Ψάχνει να δει τι έχει, ψάχνει να δει πώς θα φτάσει εκεί που θέλει να φτάσει, ή πού ενδεχομένως θα φτάσει. Με αυτά που έχεις τι μπορείς να κάνεις; Ερευνητική δραστηριότητα είναι η κάθε ενασχόληση με τα Μαθηματικά. Σε αντίθεση με την αποστήθιση τύπων. Όταν, λοιπόν, λέω "σωστά διδαγμένα" σημαίνει ότι ο δάσκαλος και η κατάσταση στην οποία ο δάσκαλος ωθεί το μαθητή είναι, όχι απλώς να εφαρμόζει τους τύπους, αλλά να έχει επίγνωση γιατί εφαρμόζει τον έναν τύπο και όχι τον άλλο. Να μπορεί να βάλει το μυαλό του να δουλέψει. Αυτό σημαίνει - χωρίς νά 'χω να δώσω σε αυτά συμβουλές σε ανθρώπους οι οποίοι καθημερινά έχουν αυτό το πρόβλημα και οι οποίοι είναι πιεσμένοι από ένα αναλυτικό πρόγραμμα, το οποίο δεν μπορούν να βγάλουν - μιλάω όμως δεοντολογικά, ότι η ορθή διδασκαλία των Μαθηματικών είναι προφανώς να αναγκάσεις τον άλλο να στίψει το μυαλό του κι όχι να αποστηθίσει. Γι' αυτό η Γεωμετρία, σωστά διδαγμένη, ασκεί το μυαλό.

Και θα τελειώσω με το εξής απόφθεγμα, ή με το εξής ερώτημα, αν θέλετε, υπό μορφή αποφθέγματος. Ή απόφθεγμα, υπό μορφή ερωτήματος.

Τα παπούτσια και τα αυτοκίνητα διαφέρουν από το μυαλό και την ελευθερία του λόγου σε τί; Τα πρώτα φθείρονται όσο περισσότερο τα χρησιμοποιεί κανείς. Τα δεύτερα φθείρονται όσο περισσότερο δεν τα χρησιμοποιεί.

Ευρετήριο ονομάτων

ΕΚΔΟΣΗ 2012 - ΑΝΤΙΤΥΠΑ 9000 - ΑΡ.ΣΥΜΒ. Π 301-12-Δ-006

ΕΚΤΥΠΩΣΗ: ΑΦΟΙ Δ. ΜΟΥΓΚΟΓΙΑΝΝΗ & ΣΙΑ ΟΕ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: Μ. ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΥ

Κωδικός βιβλίου: 0-22-0018-01-2012
ISBN 978-960-06-2312-3

ΙΤΥΕ "ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ"
ινστιτουτο τεχνολογιας υπολογιστων & εκδοσεων

(02)02200180120125